ORSAY
n° d'ordre : 2771

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ÉTAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

PAR

GÉRARD BOURDAUD

SUJET :

SUR LES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS À COEFFICIENTS PEU RÉGULIERS

soutenue le 7 JUILLET 1983 devant la Commission d'examen

MM. J.P. KAHANE Président

Y. MEYER

E.M. STEIN

S. GALLOT

B. MAUREY

LIBRARY
STANFORD
JUNIOR

ORSAY
n° d'ordre :

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR D'ÉTAT

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES

PAR

GÉRARD BOURDAUD

SUJET :

SUR LES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

À COEFFICIENTS PEU RÉGULIERS

soutenue le 7 JUILLET 1983 devant la Commission d'examen

MM. J.P. KAHANE Président

Y. MEYER

E.M. STEIN

S. GALLOT

B. MAUREY

This thesis presents first the main properties - continuity, developments for the composition and the adjoint - of the pseudo-differential calculus for symbols $\sigma(x,\xi)$ which are classic with respect to ξ and Hölder-continuous with respect to x.

As a generalization of a theorem of Calderón, we show that the commutator between a ψ.D.O. of the class $Op^{1}_{1,0}$ and a function whose first-order derivatives are multipliers in H^s is a bounded operator on H^s.

Then we determine the largest selfadjoint subalgebra of $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ included in $Op^{o}_{1,1}$.

The last chapter is devoted to functions which operate by left composition on Sobolev and related spaces.

A Pierre Bretéché, qui fut mon maître de la classe de troisième à celle de première, je dois mon premier contact avec la mathématique comme science exacte ; je sais qu'à un moment décisif, il a su peser de son autorité pour que je poursuive des études dans cette discipline. Qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance.

Comment ne pas évoquer la mémoire de Charles Ehresmann ? En s'intéressant à mon travail dès l'année de maîtrise, il m'a donné la possibilité d'entrer dans l'enseignement supérieur et a guidé mes premiers pas de chercheur. Comment oublier les multiples tracasseries dont furent l'objet Ehresmann et ses élèves, dès le début des années soixante-dix ? Au-delà des unanimismes proclamés, la communauté mathématique est parcourue par des courants divers et la tentation est grande de substituer les règlements de comptes administratifs au libre débat des idées. Eminent mathématicien, Charles Ehresmann fut aussi un homme de cœur ; puissions-nous retenir les leçons de l'un et de l'autre.

Quand je décidai, en 1978, de changer de spécialité, je n'ignorais pas les hasards de l'entreprise ; si le pari est aujourd'hui tenu, Yves Meyer y est pour beaucoup. J'ai pu apprécier chez lui un talent pédagogique assez rare parmi les chercheurs et l'exigence intellectuelle sans laquelle aucun objectif ne vaut la peine. J'ajoute qu'enclin au doute, j'ai trouvé dans son enthousiasme un appui certain.

Jean-Pierre Kahane m'a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse ; le séminaire d'Analyse Harmonique d'Orsay, qu'il anime depuis des années, a été pour moi - comme pour d'autres - un remarquable stimulant.

Quand il a fallu m'initier aux subtilités de l'analyse réelle, je passai plusieurs mois (et quelques migraines) sur un ouvrage incontournable, les "Singular Integrals" d'Elias Stein ; comme par l'effet d'une justice immanente, c'est au professeur Stein qu'a incombé la tâche de lire en détail mon travail ; c'est dire que je lui suis doublement reconnaissant.

Sylvain Gallot m'avait initié - il y a quelques années, à l'occasion d'un cours de troisième cycle - à la géométrie Riemannienne; il a accepté de me proposer un sujet de seconde thèse qui m'a permis d'approfondir mes connaissances dans ce domaine ; je mesure aujourd'hui ce que je dois au mathématicien et à l'ami.

Je remercie Bernard Maurey de représenter ici l'U.E.R. de Mathématiques de Paris VII, qui a su faciliter ma tâche, tant en allégeant mes services d'enseignement qu'en assurant la reprographie de cette thèse ; je suis particulièrement reconnaissant à Madame Colette Pradier pour la diligence et la qualité de son travail dactylographique et à Mesdames Barrier et Gilbert qui ont effectué avec soin la reproduction offset.

Ghislaine, Cécile et Emmanuel n'ont pas eu la malencontreuse idée d'effacer leur personnalité devant les hautes préoccupations intellectuelles de leur époux et père ; c'est - entre autres - pour cela que je leur dois ma plus grande part de bonheur.

Ma mère m'a transmis son goût des mathématiques et sa passion pour l'enseignement. Elle-même n'avait pu pousser ses études aussi loin qu'elle le souhaitait ; il est juste qu'elle éprouve aujourd'hui de la fierté. Cette thèse lui est dédiée.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543523_0021

TABLE DES MATIERES

pages

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I : Les techniques de base 12

CHAPITRE II : Le calcul des opérateurs pseudo-différentiels peu réguliers 31

CHAPITRE III : Commutateurs et multiplicateurs 65

CHAPITRE IV : La classe $S^0_{1,1}$ 83

CHAPITRE V : Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev 105

ANNEXES

I - La structure faible des espaces de Besov 139

II - L^p estimates for certain non-regular pseudo-differential operator (Paru aux Com. in P.D.E., vol. 7, n°9, 1982) 141

INTRODUCTION

On peut considérer qu'à l'exception du premier, les différents chapitres de cette thèse constituent autant de notes indépendantes s'articulant autour d'une même idée - celle d'opérateur pseudo-différentiel à coefficients peu réguliers - et utilisant une même technique - le développement des distributions tempérées en série de Littlewood-Paley.

1. Parallèlement à la théorie classique des opérateurs pseudo-différentiels (O.P.D.), dont les symboles sont indéfiniment dérivables par rapport à la variable spatiale , s'est en effet développée, à partir de 1960, une théorie "non orthodoxe", dans laquelle les symboles des opérateurs - ou leurs noyaux - ont des propriétés de régularité minimales.

A.P. Calderón est, avec A. Zygmund, le principal initiateur de ce programme. Dans sa conférence au symposium sur les intégrales singulières [12], il en a clairement défini la philosophie : "The aim of this greater generality is to obtain stronger estimates and to prepare the ground for applications to the theory of quasi-linear and non linear differential operators".

2. La production d'"estimations plus fortes" allait déboucher naturellement sur la résolution de problèmes linéaires à frontières peu régulières; en voici deux exemples, parmi les plus marquants.

Le premier concerne l'équation de Cauchy-Riemann. Etant donnée Γ, courbe lipschitzienne séparant le plan complexe en deux régions U_1 et U_2 , il s'agit d'écrire toute fonction $f \in L^2(\Gamma)$ sous la forme $f_1 + f_2$, où f_j est valeur au bord d'une fonction holomorphe dans U_j . Cela revient à montrer que le noyau de Cauchy

$$K(x,y) = \frac{1 + i\, A'(y)}{x-y+i(A(x)-A(y))}$$

(où $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne) conduit à un opérateur intégral singulier borné sur $L^2(\mathbb{R})$. Ce problème a été entièrement résolu au printemps 1981 par R.R. Coifman, G. David , A. Mc Intosh et Y. Meyer [17] .

Le second exemple a trait au problème de Dirichlet pour un ouvert borné U, à frontière C^1 , de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 3$), avec donnée au bord dans L^p

($1 < p < \infty$). E.B. Fabes, M. Jodeit et N.M. Rivière [20] le résolvent sous la forme classique d'un potentiel double-couche ; le point crucial est de prouver que le noyau singulier

$$K(x,y) = \frac{< x - y, N(y) >}{|x - y|^n} ,$$

où $N(y)$ est le vecteur normal unité, conduit à un opérateur compact sur $L^p(\partial U)$; les trois auteurs obtiennent ainsi des estimations fines sur le comportement, près du bord, d'une fonction harmonique et de son gradient. Très récemment [21], Fabes, Jerison et Kenig ont généralisé ces résultats aux solutions de l'équation

$$(1) \qquad \operatorname{div}(A(x) . \nabla u) = 0 ,$$

où $A(x)$ est une matrice symétrique, réelle, elliptique, ayant une propriété de régularité minimale au bord du domaine. De son côté, Verchota (voir [40]) a traité le cas des domaines à bord lipschitzien.

3. Dès 1961, J. Moser [41] soulignait le lien entre les opérateurs différentiels à coefficients peu réguliers et l'analyse non linéaire. Son propos était alors de montrer l'inégalité de Harnack pour les solutions de l'équation elliptique (1). A n'a aucune propriété de régularité, sinon d'être une fonction intégrable de x. J. Moser commente ainsi le choix de ces hypothèses : "The generality of the assumptions on the coefficients is called for if one studies non linear differential equations, where the coefficients of A may depend on the solution u and its first derivatives for which non smoothness properties are available...".

L'idée de J. Moser est reprise dans les travaux plus récents sur la régularité des solutions d'E.D.P. non linéaires : à l'équation non linéaire $F(x,(u^{(j)}(x))_{|j| \leq m}) = 0$, on associe - soit en la dérivant deux fois, comme le font M. Beals et M. Reed [4], soit par le procédé plus subtil de J.M. Bony [8] - une équation linéaire dont les coefficients dépendent de u.

4. Il n'existe pas (encore ?) de point de vue unifié sur les O.P.D. à coefficients non réguliers ; disons qu'on peut discerner cinq tendances.

Le premier courant consiste à définir les opérateurs par leurs noyaux; il prend sa source dans les travaux de A.P. Calderón et A. Zygmund sur les intégrales singulières pour aboutir aux "opérateurs de Calderón-Zygmund" généraux de R.R. Coifman et Y. Meyer [15] et a entrainé un important développement des méthodes dites de "variable réelle"; il est toujours d'actualité comme en témoignent les travaux évoqués au §2.

Un deuxième point de vue consiste à définir l'opérateur T par son symbole $a(x,\xi)$, à l'aide de la formule habituelle :

$$(2) \qquad Tf(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} a(x,\xi) \hat{f}(\xi) d\xi .$$

$a(x,\xi)$ satisfait les inégalités

$$(3) \qquad \| \partial_\xi^\alpha a(-,\xi) \|_E \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{m-|\alpha|},$$

où E est un certain espace de Banach de fonctions de x. On parlera alors de symbole "de classe $S^m_{1,0}$ en ξ et de classe E en x". Le plus souvent E est un espace de Hölder C^r $(r > 0)$ ou de Sobolev H^s $(s > n/2)$.

On définit de manière analogue les symboles de classe $S^m_{\rho,\delta}$ en ξ et de classe C^r en x. A ce courant peuvent se rattacher les travaux suivants :

a) R. R. Coifman et Y. Meyer déterminent la régularité minimale en x nécessaire pour obtenir la continuité L^p des opérateurs de la classe $S^o_{1,0}$ [15].

b) H. Kumano-go et M. Nagase [31] démontrent les estimations L^p pour les O.P.D. peu réguliers ainsi que certains de leurs commutateurs, puis une forme précisée de l'inégalité de Gårding

c) J. D. Alvarez-Alonso et A. P. Calderón [2] construisent des algèbres A_k auto-adjointes d'O.P.D. de la forme

$$(4) \qquad T = \sum_{j=0}^{N} Op(a_j) + R$$

où $a_j(x,\xi)$ est de classe $S^{j(\delta-\rho)}_{\rho,\delta}$ en ξ, de classe C^{M-j} en x et R est un opérateur borné de H^{-k} dans L^2 et de L^2 dans H^k (M et N

sont des entiers dépendant de n,k,ρ et δ).

Avec les travaux de J.M. Bony [8], c'est un troisième point de vue - très original - qui apparaît. Bony modifie la correspondance entre le symbole et l'opérateur de la façon suivante : il remplace, dans la formule (2) , $a(x,\xi)$ par

$$\tilde{a}(x,\xi) = \int \chi(\eta,\xi)\ \hat{a}(\eta,\xi)\ \ e^{ix.\eta} d\eta \ ,$$

où $\hat{a}(\eta,\xi)$ désigne la transformée de Fourier de $a(\cdot,\xi)$ et χ une fonction homogène de degré 0, C^∞ en dehors de l'origine, telle que $\chi = 1$ pour $|\eta| \leq \varepsilon_1|\xi|$ et $\chi = 0$ pour $|\eta| \geq \varepsilon_2|\xi|$ (ε_1 et ε_2 sont des petits nombres positifs, fixés une fois pour toutes). En clair il s'agit d'amputer $a(x,\xi)$ des fréquences, en x, qui sont grandes par rapport à ξ .
L'opérateur ainsi obtenu est appelé opérateur para-différentiel de symbole $a(x,\xi)$. Les classes d'opérateurs construites par ce procédé ont des propriétés satisfaisantes de composition et d'adjonction; J.M. Bony s'en sert pour démontrer des résultats très généraux sur la propagation des singularités dans les E.D.P. non linéaires.

Dans une quatrième catégorie, nous rangerons des travaux plus pragmatiques - mais non moins féconds - où les énoncés du calcul pseudo-différentiel peu régulier apparaissent "à la demande", sans traitement systématique du sujet. Le travail de M. Beals et M. Reed [4] en est un bon exemple.

Au cinquième acte, il n'est plus question - du moins en apparence - ni de symbole, ni de noyau. Les opérateurs peu réguliers sont construits à partir d'opérateurs auto-adjoints, à l'aide du calcul fonctionnel borélien (ou encore par le calcul de Kato pour les opérateurs maximaux accrétifs). Considérons par exemple, avec T. Kato [28] , l'opérateur

$$H_\tau = -\Delta + \tau V(x) \ ,$$

défini dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, où le potentiel V appartient à $L^\infty \cap L^{3/2}$ et τ est proche de 0 ; l'opérateur de scattering associé à H_τ s'écrit

$$S_\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j L_j(V,\ldots,V) \ ,$$

où $L_j(V_1,\ldots,V_j)$ est un opérateur borné sur $L^2(\mathbb{R}^3)$ dépendant multilinéairement de $(V_1,\ldots,V_j)$; compte tenu de la faible régularité

de V, $L_j(V,\dots,V)$ est - en un sens - un O.P.D. d'ordre 0 à coefficients peu réguliers.

Il se trouve que les opérateurs multilinéaires L_j sont du même type que ceux utilisés par Coifman, Mc Intosh et Meyer pour résoudre les conjectures de Calderón [17]. Qu'une telle concordance apparaisse entre des problèmes aussi différents - l'un issu de l'analyse complexe, l'autre de la mécanique quantique - nous amène à cette conclusion ambivalente : bien qu'on possède maintenant des techniques assez puissantes et assez générales pour venir à bout des O.P.D. peu réguliers, la théorie d'ensemble reste largement fragmentaire.

5.- La filiation historique qui mène du théorème de Littlewood-Paley aux estimations L^p des O.P.D. n'est qu'un aspect de la longue histoire des rapports entre l'analyse harmonique et la théorie des opérateurs (voir, entre autres, l'essai de Stein sur l'œuvre de Zygmund [49]).

A l'origine, Littlewood et Paley [33] s'intéressent aux fonctions périodiques d'une variable ; une telle fonction s'écrit $f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f$, où $\Delta_j f$ est la somme partielle

$$\sum_{2^j \leq |k| < 2^{j+1}} \hat{f}(k) e^{ikx} \quad (j \geq 1) ;$$

ils montrent alors l'existence, pour tout $p \in]1,+\infty[$, d'une constante $C_p \geq 1$ telle que

$$C_p^{-1} \|f\|_p \leq \|(\sum_{j\geq 0} |\Delta_j f|^2)^{1/2}\|_p \leq C_p \|f\|_p .$$

La théorie s'adapte immédiatement aux fonctions définies sur la droite réelle, on pose alors $(\Delta_j f)\hat{}\,(\xi) = \chi(2^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$, où χ est la fonction caractéristique de l'ensemble $1 \leq |\xi| \leq 2$. En dimension supérieure, il est nécessaire, pour conserver des résultats significatifs, de remplacer la fonction χ par une fonction suffisamment dérivable portée, disons, par la couronne $1/2 \leq |\xi| \leq 2$.

C'est Marcinkiewicz, dans son célèbre théorème sur les multiplicateurs

de FL^p, qui a eu, le premier, l'idée d'utiliser les inégalités de Littlewood-Paley pour obtenir la continuité L^p de certains opérateurs. Dans sa nombreuse postérité, citons R.R. Coifman et Y. Meyer [15], puis J.M. Bony [8], pour leurs applications aux O.P.D. peu réguliers.

En fait, la plupart des espaces fonctionnels utilisés en analyse sont caractérisés par des propriétés de la suite $(\Delta_j f)_{j\geq o}$. C'est le point de vue que nous développons dans le chapitre I ; il s'agit essentiellement de rappels sans démonstration : pour un traitement complet, on pourra consulter les travaux de J. Peetre (voir [6]) ou ceux, particulièrement exhaustifs, de H. Triebel [53].

6.- Au cours du chapitre II, nous exposons le calcul pseudo-différentiel pour les symboles classiques d'ordre quelconque en ξ, höldériens en x - autrement dit, qui vérifient (3) avec $E = C^r$. Comme d'habitude, le calcul s'effectue à l'addition près d'opérateurs régularisants, à condition de s'entendre sur le sens du mot : nous disons qu'un opérateur est régularisant d'ordre m sur l'intervalle I de $\mathbf{R}$ s'il envoie H^s dans H^{s+m} quel que soit $s \in I$. Le principal théorème du chapitre consiste à donner un sens à la formule de composition

$$Op(a) \circ Op(b) = \sum_{|j|\leq N} \frac{1}{j!} Op(\partial_\xi^j a \,.\, D_x^j b) + R.$$

Il faut, bien sûr, imposer $N < r_2$, où r_2 est l'exposant de Hölder de b. Ensuite, le composé $Op(a) \circ Op(b)$ doit être défini, au moins sur la classe de Schwartz ; or $Op(b)$ envoie génériquement $\mathcal{S}$ dans C^{r_2} et $Op(a)$ n'est défini sur C^{r_2} que si r_2 est supérieur à $m_1 - r_1$ (m_1 et r_1 désignant respectivement l'ordre et l'exposant de Hölder de a) ; la deuxième condition s'écrit donc $m_1 < r_1 + r_2$. Enfin, la formule de composition n'aura d'intérêt que si le reste R est régularisant d'ordre $\inf(r_2, N+1) - m_1 - m_2$ sur un intervalle I non vide : en fait, nous déterminons le plus grand intervalle I possible en fonction de r_1, r_2, m_1, m_2 et N. Des considérations analogues s'appliquent au développement limité de l'adjoint d'un O.P.D.

Nous pouvons alors renforcer (dans ce cadre plus restreint des classes

$S^m_{1,0}$ peu régulières) les résultats de J.D. Alvarez-Alonso et A.P. Calderón. On obtient une algèbre auto-adjointe A_k formée des opérateurs de la forme (4), où $N = k - 1$, $a_j(x,\xi)$ est d'ordre $-j$ en ξ et de classe C^{2k-j} en x ; le reste R est régularisant d'ordre k sur l'intervalle $[-k,0]$.

Une caractéristique du calcul pseudo-différentiel peu régulier, c'est que les estimations H^s sont obtenues pour s appartenant à un intervalle ouvert borné ; ainsi, le commutateur entre deux O.P.D. d'ordre 0, lipschitziens en x, est borné de H^{s-1} dans H^s pour tout $s \in]0,1[$. En comparant avec le théorème classique de Calderón [11], on peut se demander si ce résultat ne s'étend pas à $s = 0$ et $s = 1$.

La réponse est positive quand l'un des symboles est indépendant de ξ - c'est en fait une conséquence du théorème des commutateurs de R.R. Coifman et Y. Meyer (voir le paragraphe suivant). Ce cas mis à part, il est presque trivialement faux que le commutateur envoie H^{-1} dans L^2 ; par contre, nous ne connaissons pas d'exemple où il ne soit pas borné de L^2 dans H^1 ; en tout cas, il faut renoncer à l'idée, pourtant naturelle, d'une quelconque équivalence entre la continuité $H^{-1} \to L^2$ et la continuité $L^2 \to H^1$.

7.- Au chapitre III, on se propose d'étendre aux espaces de Sobolev le théorème des commutateurs de Coifman et Meyer [16] :

pour un réel $p \in]1,\infty[$ et une distribution A sur $\mathbb{R}^n$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) ∇A est un multiplicateur de L^p (autrement dit, $\nabla A \in L^\infty$!)

(ii) pour tout O.P.D. T de la classe $Op^1_{1,0}$, le commutateur $[A,T]$ est borné sur L^p.

Nous montrons qu'on peut remplacer, dans l'énoncé ci-dessus, l'espace L^p par l'espace de Sobolev H^s_p ($s > 0$) ou encore l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ ($s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $1 \leq q < \infty$).

La difficulté, c'est qu'on ne possède pas de description analytique

commode des multiplicateurs de H^s_p (au moins pour $s < \frac{n}{p}$). Nous tournons l'obstacle en nous ramenant, par un calcul d'opérateurs purement algébrique, au théorème original de Coifman et Meyer.

8.- Il y a, pour un symbole $a(x,\xi)$, plusieurs façons d'être "irrégulier" : ce peut être parce qu'il manque de dérivées en x, ou encore parce que ses dérivées en x croissent trop vite quand ξ tend vers l'infini ; ainsi en est-il des symboles de la classe "interdite" $S^0_{1,1}$ définie par les inégalités $|\partial^\alpha_\xi \partial^\beta_x a(x,\xi)| \leq C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$.

Néanmoins, la classe $Op^0_{1,1}$ possède de bonnes propriétés telles que la continuité H^s, pour tout $s > 0$; elle intervient dans les problèmes non linéaires, comme on le verra au chapitre V ; enfin, c'est aux classes $S^{-r}_{1,1}$ $(r > 0)$ qu'appartiennent les termes résiduels dans le calcul de J.M. Bony, ainsi que l'a remarqué Y. Meyer [38].

Après un rappel des propriétés de continuité pour $Op^0_{1,1}$, nous décrivons, au chapitre IV, les principaux aspects pathologiques de cet espace d'opérateurs.

Bien que $Op^0_{1,1}$ s'injecte dans $\mathcal{L}(H^1,H^1)$, ce n'en est pas une sous-algèbre ; ce n'est pas non plus une classe auto-adjointe, au sens de la dualité L^2 ; même en se restreignant à ceux des opérateurs de $Op^0_{1,1}$ qui sont bornés sur L^2, on n'obtient toujours pas une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

Par contre, il est relativement commode de décrire les noyaux-distributions de la classe $Op^0_{1,1}$; enfin, l'ensemble des opérateurs $T \in Op^0_{1,1}$ tels que $T^* \in Op^0_{1,1}$ est une sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ - nécessairement la plus grande des sous-algèbres auto-adjointes de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ contenues dans $Op^0_{1,1}$.

9.- Au chapitre V, nous abordons le plus banal des problèmes non linéaires : étant donné une classe E de fonctions à valeurs réelles, déterminer, autant que faire se peut, les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui opèrent sur E par composition à gauche.

A côté des conditions suffisantes plus ou moins classiques, nous établissons une condition nécessaire - due à B.E.J. Dahlberg, dans le cas

où s est entier [19] :

Soit un réel $s \in]1+\frac{1}{p}, \frac{n}{p}[$; alors les seules fonctions C^∞ qui opèrent sur l'espace de Sobolev H^s_p $(1 < p < \infty)$ ou sur l'espace de Besov $B^s_{p,q}$ (s non entier, $p,q \in [1,\infty]$) sont les fonctions $t \to ct$.

En d'autres termes, ces espaces vectoriels sont aussi éloignés d'être des algèbres qu'il est possible de l'être ...

Pour les grandes valeurs de s ($s > n/2$), une manière élégante de montrer que toute fonction C^∞ opère sur H^s consiste à écrire $F \circ f = T_f(f)$, où $T_f \in Op^0_{1,1}$; nous cherchons alors à transposer cette technique de linéarisation aux espaces A_ω définis par

$$\|f\|^2_{A_\omega} = \int |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi < \infty.$$

Nous mettons en évidence des conditions raisonnables sur ω pour que $Op^0_{1,1}$ soit bornée sur A_ω ; alors, dès que A_ω s'injecte dans L^∞, les fonctions C^∞ opèrent sur A_ω (en particulier A_ω est une algèbre !).

La première de ces conditions, c'est que ω reste "constant" sur chaque couronne dyadique (plus précisément qu'il existe $C > 0$ tel que $\frac{1}{2}|\eta| \le |\xi| \le 2|\eta|$ implique $\omega(\xi) \le C\, \omega(\eta)$). De tels poids sont nécessairement à croissance polynômiale. Il paraît donc intéressant, en contrepoint, d'étudier des algèbres à poids exponentiels. Pour $0 < s < 1$, soit A_s l'algèbre des $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que $\int |\hat{f}(\xi)|^2 \exp|\xi|^s d\xi < \infty$.

On montre que certaines fonctions C^∞ n'opèrent pas sur A_s, puis que certaines fonctions non analytiques opèrent sur A_s.

Les techniques utilisées sont classiques en Analyse Harmonique. Pour le premier résultat, on observe que A_s contient des fonctions de la classe de Gevrey G_d $(1 < d < s^{-1})$; pour le second, on imite un théorème de N. Leblanc [32] en estimant soigneusement $\|e^{ikf} - 1\|_{A_s}$ quand $k \to \infty$.

NOTATIONS

1.- Opérations élémentaires sur les fonctions.

Pour $y \in \mathbb{R}^n$, on note τ_y l'opérateur de translation qui à f associe $x \longmapsto f(x - y)$.

Pour $r > 0$, on note δ_r l'opérateur de dilatation qui à f associe $x \longmapsto f(r\,x)$.

Si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, la dérivée partielle

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} f$$

est notée $\partial_x^\alpha f$, $\partial^\alpha f$ ou encore $f^{(\alpha)}$; D^α désigne l'opérateur différentiel $(-i\partial)^\alpha$.

f^* est la fonction maximale de Hardy et Littlewood

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \quad ,$$

où B(x,r) est la boule ouverte de rayon r centrée en x.

2.- Espaces fonctionnels .

$\|f\|_p$ désigne la norme de f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ $(1 \le p \le \infty)$; p' est l'exposant conjugué $\frac{p}{p-1}$.

Si E est un espace de Banach autre que les L^p, la norme de f dans E est désignée par $\|f\|_E$.

Pour m entier et $1 \le p \le \infty$, $L^p_m(\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ telles que les dérivées de f, au sens des distributions, jusqu'à l'ordre m inclus, appartiennent à $L^p(\mathbb{R}^n)$; en particulier $L^\infty_1(\mathbb{R}^n)$ est l'espace des fonctions lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}^n$. On pose $L^p_\infty = \bigcap_{m \in \mathbb{N}} L^p_m$.

A propos de l'espace C^r $(r \in \mathbb{R})$, on consultera le paragraphe 2 du chapitre I et le paragraphe 1 du chapitre II.

3.- Analyse de Fourier.

La transformée de Fourier de f est

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi} f(x)dx \quad .$$

Si $\sigma(x,\xi)$ est une fonction sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, l'opérateur pseudo-différentiel (O.P.D.) de symbole σ est noté $Op(\sigma)$ et défini, sur la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, par

$$Op(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi} \sigma(x,\xi)\hat{f}(\xi)d\xi \quad .$$

(nous éviterons la notation $\sigma(x,D)$, où apparaît la variable muette x ; par contre si σ est indépendant de x, $Op(\sigma)$ sera noté parfois $\sigma(D)$, suivant la coutume). $S^m_{\rho,\delta}$ désigne la classe de Hörmander des $\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ telles que

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}$$

et $Op^m_{\rho,\delta}$ l'ensemble des O.P.D. associés.

CHAPITRE I - LES TECHNIQUES DE BASE

Les estimations d'opérateurs pseudo-différentiels reposent sur une double analyse :

- une analyse des fonctions, en l'occurence la partition dyadique de leurs spectres, dont l'idée est apparue pour la première fois dans les travaux de Littlewood et Paley [33] ;

- une analyse des symboles, qui consiste, d'une façon ou d'une autre, à se ramener au symbole $\sigma(x,\xi) = m(x)\phi(\xi)$ - où m et ϕ appartiennent à $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ - pour lequel la continuité L^2 est immédiate. On tente d'écrire les symboles plus généraux sous formes d'intégrales

$$\int_\Omega m_\omega(x)\phi_\omega(\xi)\, d\omega ,$$

où $(\Omega, d\omega)$ est un espace mesuré approprié.

La réalisation de ce programme a pris des formes très diverses suivant le type de symbole étudié.

Giraud (en 1934), puis Calderón et Zygmund (dans les années 50), considéraient des symboles homogènes de degré 0 en ξ, indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$, et ceci uniformément en x - autrement dit tels que $\partial_\xi^\alpha \sigma \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times S^{n-1})$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Un tel symbole s'écrit

$$(1) \qquad \sum_{j\geq 0} \lambda_j m_j(x)\, \phi_j(\xi) ,$$

où $\|m_j\|_\infty = 1$, ϕ_j est une harmonique sphérique de degré j, normalisée dans $L^2(S^{n-1})$ et $(\lambda_j)_{j\geq 0}$ une suite à décroissance rapide. La série d'O.P.D. associée à (1) converge normalement dans $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

Pour démontrer la continuité de L^2 de la classe $Op^0_{0,0}$, Calderón et Vaillancourt [13] se ramènent à la dimension 1 et écrivent le symbole sous la forme

$$(2) \qquad \iint_{\mathbb{R}^2} \tau_s\phi(x)\, \tau_t\phi(\xi)\, g(s,t)\, ds\, dt ,$$

où $g \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ et $\phi(x) = \frac{1}{2} H(x)\, x^2\, e^{-x}$; il résulte alors du lemme de presque-orthogonalité de Cotlar que l'intégrale d'opérateurs associée à (2) est faiblement convergente dans $\mathcal{L}(L^2,L^2)$. Cette méthode est, en un sens, la meilleure possible quand les hypothèses sur le symbole sont uniformément invariantes sous l'effet des translations en x et en ξ (voir [9]).

Sur la classe $S^0_{1,0}$, Coifman et Meyer [15] ont obtenu les résultats optimaux - quant à la régularité exigée en x - en combinant les deux points de vue précédents, celui de la convergence normale et celui de la presque-orthogonalité ; plus précisément, les symboles s'écrivent

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} u_k \Big(\sum_{j \geq 0} m_{j,k}(x)\, \psi_k(2^{-j}\xi) \Big) ,$$

où $\| m^{(\alpha)}_{k,j} \|_\infty \leq C_\alpha$, ψ_k est à support compact ne contenant pas l'origine et $\Sigma\, u_k$ une série positive convergente ($u_k = (1 + |k|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, pour tout dire) ; le lemme de presque-orthogonalité s'applique à l'opérateur associé à $\sum_{j \geq 0} \ldots$ et donne un opérateur borné sur L^2, uniformément en k.

1.- SERIES DE LITTLEWOOD-PALEY D'UNE DISTRIBUTION TEMPEREE .

Soit a un réel donné, supérieur à 1, et G le groupe des homothéties de rapport a^j ($j \in \mathbb{Z}$), opérant sur $\mathbb{R}^n$. On se donne des nombres b et c tels que $0 < b < \frac{c}{a}$; l'orbite de $\xi \neq 0$ sous l'action de G rencontre la couronne $b < |\eta| < c$ en au moins un et au plus N points, l'entier N ne dépendant que de a,b,c. Ceci nous conduit au

Lemme 1.- Etant donné des réels $a > 1$, $b > 0$, $c > ab$, il est possible de trouver une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, portée par la couronne $b \leq |\eta| \leq c$, strictement positive sur $b < |\xi| < c$, telle que $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi(a^j \xi) = 1$ pour tout $\xi \neq 0$.

On part de $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, portée par $b \leq |\xi| \leq c$, strictement positive sur $b < |\xi| < c$. De l'hypothèse $c > ab$, il découle que $\Theta(\xi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \theta(a^j \xi)$ est une fonction C^∞, strictement positive sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

La fonction $\phi = \theta \cdot \Theta^{-1}$ a exactement les propriétés requises. C.Q.F.D.

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera exclusivement à l'analyse des hautes fréquences des fonctions ; dès lors, nous écrirons la partition de l'unité du lemme 1 sous la forme

$$\phi_0(\xi) + \sum_{j\geq 1} \phi(a^{-j}\xi) = 1, \tag{3}$$

où ϕ_0 est C^∞, portée par la boule $|\xi| \leq c$.

A (3) est associée une suite d'opérateurs de convolution $\Delta_j : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$, définis par $(\Delta_j f)^\wedge(\xi) = \phi(a^{-j}\xi)\,\hat{f}(\xi)$ pour $j \geq 1$ et $(\Delta_0 f)^\wedge(\xi) = \phi_0(\xi)\,\hat{f}(\xi)$; on a alors, pour tout $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$,

$$f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f \quad . \tag{4}$$

Convenons d'appeler (4) une "décomposition de Littlewood-Paley" de f ; deux remarques s'imposent alors :

1°.- Dans la théorie originale de Littlewood-Paley [33] , on est en dimension 1 et la partition de l'unité est

$$\sum_{j\geq 1} \chi(2^{-j}\xi) + \chi_0(\xi) = 1,$$

où χ est la fonction caractéristique de la couronne $1 \leq |\xi| \leq 2$. En dimension supérieure à 1, cette approche est impraticable ; en effet, comme l'a montré Ch. Fefferman [22], $\chi(\xi)$ n'est plus un multiplicateur de FL^p $(p \neq 2)$. Aussi a-t-on été amené à remplacer χ par une fonction caractéristique régularisée telle que ϕ.

2°.- Dans quelle mesure les propriétés de la série (4) dépendent-elles du choix des constantes a, b, c et de la fonction ϕ ?

L'exemple suivant est particulièrement typique.

Soit E un espace de Banach de distributions tempérées ; nous faisons sur E une hypothèse d'homogénéité au sens de Katznelson [29] :

(i) l'opérateur de translation τ_t opère isométriquement sur E ;

(ii) pour tout $u \in E$, l'application $t \mapsto \tau_t u$ est mesurable de $\mathbf{R}^n$ dans E.

Ces deux conditions entraînent classiquement que les opérateurs Δ_j sont bornés sur E, uniformément en j.

Proposition 1.- Soient $s \in \mathbf{R}^*$ et $q \in [1,+\infty]$, alors l'espace de Banach des $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ telles que $(a^{js} \|\Delta_j f\|_E)_{j\geq 0}$ appartienne à $\ell^q(\mathbf{N})$ ne dépend que de s et de q.

Donnons-nous $a' > 1$, $b' > 0$, $c' > a'b'$; à l'aide du lemme 1, on obtient une autre décomposition de Littlewood-Paley, que nous noterons

$$f = \sum_{k\geq 0} \Delta'_k f \quad ;$$

il s'agit de montrer l'existence de $C > 0$ tel que

$$(5) \qquad \|(a^{js} \|\Delta_j f\|_E)\|_{\ell^q} \leq C \|((a')^{ks} \|\Delta'_k f\|_E)\|_{\ell^q}.$$

On a $\Delta_j f = \sum_{\alpha j+\beta<k<\alpha j+\gamma} \Delta_j(\Delta'_k f)$, où $\alpha = \frac{\text{Log } a}{\text{Log } a'}$ et β, γ sont des réels dépendant de a, b, c, a', b', c' ; ainsi a-t-on

$$\|\Delta_j f\|_E \leq C \sum_{\alpha j+\beta<k<\alpha j+\gamma} \|\Delta'_k f\|_E \quad .$$

Soit $(\omega_j)_{j\geq 0}$ une suite positive à support fini ; on a

$$\sum_{j\geq 0} a^{js} \|\Delta_j f\|_E \omega_j \leq C \sum_{k\geq 0} \|\Delta'_k f\|_E \Big(\sum_{\frac{k-\gamma}{\alpha}<j<\frac{k-\beta}{\alpha}} a^{sj} \omega_j \Big) .$$

Nous verrons dans un instant que la suite

$$\omega'_k = (a')^{-sk} \sum_{\frac{k-\gamma}{\alpha}<j<\frac{k-\beta}{\alpha}} a^{sj} \omega_j$$

vérifie l'estimation

$$(6) \qquad \|(\omega'_k)_{k\geq o}\|_{\ell^{q'}} \leq C \|(\omega_j)_{j\geq o}\|_{\ell^{q'}} \ .$$

D'où

$$\sum_{j\geq o} a^{js} \|\Delta_j f\|_E \omega_j \leq C \|(\omega_j)_{j\geq o}\|_{\ell^{q'}} \|((a')^{sk} \|\Delta'_k f\|_E)_{k\geq o}\|_{\ell^q}$$

qui donne immédiatement (5).

Pour établir (6), il suffit, par interpolation, de le faire pour $q' = 1$ et $q' = +\infty$; dans chacun de ces deux cas, (6) est une conséquence de l'inégalité élémentaire

$$\sum_{\frac{k-\gamma}{\alpha}<j<\frac{k-\beta}{\alpha}} a^{sj} \leq C\ (a')^{sk} \ ,$$

vérifiée pour $s \neq 0$. C.Q.F.D.

Remarque.- Les espaces considérés à la proposition 1 ont été introduits, dans un contexte plus général, par H. Triebel [52].

2.- ESPACES DE SOBOLEV ET DE BESOV.

Dans ce paragraphe, s désigne un nombre réel, p, q des éléments de $[1,+\infty]$.

L'opérateur $(I - \Delta)^{-s/2}$ est un automorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; on en déduit immédiatement que $H^s_p(\mathbf{R}^n) = (I - \Delta)^{-s/2}(L^p(\mathbf{R}^n))$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{H^s_p} = \|(I - \Delta)^{s/2} f\|_p \ .$$

Si s est un entier positif et $1 < p < +\infty$, on montre classiquement ([48],[6]) que H^s_p coïncide avec l'espace de Sobolev $L^p_s(\mathbf{R}^n)$; par contre, $H^s_\infty \neq L^\infty_s$ et $H^s_1 \neq L^1_s$ (sauf pour $n = 1$ et s pair : voir [48],

chapitre V, 6.6). Aussi sommes-nous conduits à n'utiliser les H^s_p que pour $1 < p < \infty$.

Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, le module de continuité de f en norme L^p est défini par

$$\omega_p(f,t) = \sup_{|y| \le t} \|\tau_y f - f\|_p .$$

L'espace de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$, pour $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, est l'ensemble des $f \in L^p_{[s]}(\mathbb{R}^n)$ telles que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $[s]$, la fonction

$$t \longmapsto t^{-s+[s]}\omega_p(f^{(\alpha)},t)$$

appartienne à $L^q(\mathbb{R}^+, \frac{dt}{t})$; $B^s_{p,q}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\sum_{|\alpha| \le [s]} \|f^{(\alpha)}\|_p + \sum_{|\alpha| = [s]} \left[\int_0^{+\infty} [t^{-s+[s]}\omega_p(f^{(\alpha)},t)]^q \frac{dt}{t} \right]^{1/q}$$

(avec la modification habituelle pour $q = +\infty$).

Proposition 2.- Pour tous $a > 1$ et $\gamma > 1$, il existe $C > 0$, dépendant en outre de s, n, p, q, tel que

(i) pour toute fonction $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ portée par la couronne $\gamma^{-1} \le |\xi| \le \gamma$, la suite des distributions $(f_j)_{j \ge 0}$ définies par $\hat{f}_j(\xi) = \psi(a^{-j}\xi)\hat{f}(\xi)$ vérifie les inégalités

$$\|\left(\sum_{j \ge 0} a^{2sj}|f_j|^2\right)^{1/2}\|_p \le C \|\psi\|_{L^\infty_m} \|f\|_{H^s_p} ,$$

$$\left(\sum_{j \ge 0} a^{qsj} \|f_j\|_p^q\right)^{1/q} \le C \|\psi\|_{L^\infty_m} \|f\|_{B^s_{p,q}}$$

(où $m = [\frac{n}{2}] + 1$) ;

(ii) pour toute suite $(f_j)_{j \ge 0}$ de fonctions à spectres respectifs dans les

couronnes $\gamma^{-1}a^j \le |\xi| \le \gamma\, a^j$, on a

$$\| \sum_{j=o}^{\infty} f_j \|_{H_p^s} \le C \| (\sum_{j=o}^{\infty} a^{2sj} |f_j|^2)^{1/2} \|_p ,$$

$$\| \sum_{j=o}^{\infty} f_j \|_{B_{p,q}^s} \le C (\sum_{j=o}^{\infty} a^{qsj} \| f_j \|_p^q)^{1/q} ;$$

(iii) en outre, dès que s est > 0, on peut, dans le (ii), remplacer les couronnes $\gamma^{-1}a^j \le |\xi| \le \gamma\, a^j$ par les boules $|\xi| \le \gamma\, a^j$.

La preuve de (i) et (ii) est maintenant classique (voir par exemple [6], chap. 6) ; le point (iii) m'a été signalé par Yves Meyer [38],[39].

Corollaire.- Soit $(\Delta_j)_{j\ge o}$ la suite d'opérateurs définie par le lemme 1 ; alors les expressions suivantes sont équivalentes, respectivement, à la norme dans H_p^s ($1 < p < \infty$, $s \in \mathbf{R}$) et à la norme dans $B_{p,q}^s$ ($s \in \mathbf{R}^+ \setminus \mathbf{N}$, $p,q \in [1,+\infty]$) :

$$(7) \qquad \| (\sum_{j=o}^{\infty} a^{2sj} |\Delta_j f|^2)^{1/2} \|_p$$

$$(8) \qquad \| (a^{sj} \| \Delta_j f \|_p)_{j\ge o} \|_{\ell^q(\mathbf{N})} .$$

Désormais, nous utiliserons systématiquement (7) et (8) comme normes dans les espaces de Sobolev et de Besov ; si cela n'est pas précisé, on choisit les constantes a = 2 (d'où le terme de "décomposition dyadique"), c = 2, $b = \frac{1}{2}$.

On se sert de (8) pour étendre la définition de $B_{p,q}^s$ à toutes les valeurs de $s \in \mathbf{R}$.

Ainsi pour $s \le 0$ ou $s \in \mathbf{N}$, $B_{p,q}^s$ sera l'espace des $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ telles que

$$(a^{sj} \| \Delta_j f \|_p)_{j\ge o} \in \ell^q(\mathbf{N}).$$

Remarques.

1°.- Pour $s \neq 0$, $B^s_{p,q}$ n'est autre que l'espace considéré à la proposition 1, quand $E = L^p$.

2°.- On peut généraliser encore les espaces de Sobolev en considérant l'espace $F^s_{p,q}$ des $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ telles que $(\sum_{j=0} a^{sjq}|\Delta_j f|^q)^{1/q} \in L^p$ (voir les travaux de H. Triebel [53]).

3°.- Pour $s \in]0,1[$, $B^s_{\infty,\infty}$ n'est autre que l'espace, habituellement noté C^s, des fonctions continues bornées, hölderiennes d'exposant s. Par contre $B^1_{\infty,\infty}$ n'est ni l'espace C^1 usuel, ni même l'espace de Lipschitz L^∞_1 : c'est la "classe de Zygmund" des fonctions continues bornées f telles que $|f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)| \leq C|h|$.

4°.- Rappelons quelques relations d'inclusion entre les espaces de Sobolev et de Besov. $B^s_{p,q_1} \subset B^t_{p,q_2}$ est vérifiée dans les cas suivants :

- quels que soient $q_1, q_2 \in [1,+\infty]$ si $s > t$;

- pour $1 \leq q_1 < q_2 \leq +\infty$ si $s = t$.

On a $B^s_{p,1} \subset H^s_p \subset B^s_{p,\infty}$ et $H^s_2 = B^s_{2,2}$ (cette relation est le seul cas d'égalité entre espaces de Sobolev et espaces de Besov).

On a encore $L^p_m \subset B^s_{p,q}$ pour tout entier $m > s$; ainsi l'espace de Fréchet $\bigcap_{s \in \mathbb{R}} B^s_{p,q}$ coïncide avec L^p_∞ ; l'espace localement convexe $\bigcup_{s \in \mathbb{R}} B^s_{p,q}$ ne dépend pas, en fait, de q ; on le note $L^p_{-\infty}$.

3.- UNE INEGALITE MAXIMALE.

La proposition 2 suffit le plus souvent pour obtenir des estimations d'O.P.D. ; il est parfois nécessaire de recourir à une inégalité plus fine due à J. Peetre [43].

Proposition 3.- *Soient* $\gamma > 0$ *et* $p \in]1,+\infty[$; *pour toute suite de fonctions bornées* $(f_j)_{j \geq 0}$ *à spectres respectifs dans les boules* $|\xi| \leq \gamma 2^j$, il

existe des fonctions positives $(\omega_j)_{j\geq o}$ telles que

$$\forall\, x,y \in \mathbb{R}^n : |f_j(x-y)| \leq \omega_j(x)(1+2^j|y|)^n \quad \text{et}$$

$$(9) \qquad \|(\sum_{j\geq o} \omega_j^2)^{1/2}\|_p \leq C(n,\gamma,p)\,\|(\sum_{j\geq o} |f_j|^2)^{1/2}\|_p .$$

Posons $\omega_j(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1+2^j|y|)^{-n}|f_j(x-y)|$; nous nous proposons de montrer l'existence de $C = C(n,\gamma)$ tel que

$$(10) \qquad \omega_j \leq C\, f_j^* ,$$

où f_j^* est la fonction maximale de Hardy et Littlewood. Alors (9) sera la conséquence de (10) et de l'inégalité de Fefferman et Stein [23] :

$$\|(\sum_{j\geq o} (f_j^*)^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \leq C(n,p)\,\|(\sum_{j\geq o} |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p .$$

A toute fonction u bornée de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$, on associe $\tilde{u}(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (1+|y|)^{-n}|u(x-y)|$; le théorème des accroissements finis donne

$$(11) \qquad \tilde{u}(x) \leq C(n)(\varepsilon^{-n}u^*(x) + \varepsilon\,\widetilde{\nabla u}(x)),$$

quels que soient $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^n$; par dilatation, (11) entraîne

$$\omega_j(x) \leq C(n)\Big(\varepsilon^{-n} f_j^*(x) + \varepsilon \sup_{y\in\mathbb{R}^n} \frac{2^{-j}\,|\nabla f_j(x-y)|}{(1+2^j|y|)^n}\Big) ,$$

quels que soient $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in \mathbb{R}^n$.

Nous allons voir que le terme contenant ∇f_j peut être lui-même majoré par $C\,\omega_j(x)$. On introduit pour cela une fonction $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\hat{\theta}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \gamma$ et l'on pose $\theta_j(x) = 2^{nj}\theta(2^j x)$. On a alors $\nabla f_j = \nabla\theta_j * f_j$ et

$$|\nabla f_j(x-y)| = \Big|\int \nabla\theta_j(t)\, f_j(x-y-t)\,dt\Big|$$

$$\leq 2^{(n+1)j} \int |\nabla\theta(2^j t)|\,\omega_j(x)(1+2^j|y+t|)^n dt ;$$

on majore alors $1+2^j|y+t|$ par $(1+2^j|y|)(1+2^j|t|)$, ce qui donne

$$|\nabla f_j(x-y)| \le 2^j\, C(n,\gamma)\omega_j(x)(1+2^j|y|)^n$$

et

$$\omega_j(x) \le C(n,\gamma)(\varepsilon^{-n} f_j^*(x) + \varepsilon\, \omega_j(x)), \tag{12}$$

quels que soient $\varepsilon \in]0,1]$ et $x \in \mathbf{R}^n$.

Mais on a supposé que f_j est bornée ; alors ω_j est à valeurs finies et (12) peut s'écrire encore

$$(1 - C\varepsilon)\omega_j(x) \le C\, \varepsilon^{-n} f_j^*(x) ,$$

d'où on tire immédiatement (10). C.Q.F.D.

4.- QUESTIONS DE DENSITE .

$\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ est dense dans H_p^s et dans $B_{p,q}^s$ pour tous $s \in \mathbf{R}$ et $p,q \in [1,+\infty[$ (voir [6], théorèmes 6.2.3 et 6.2.4). Par contre $\mathcal{S}$ n'est pas dense dans $B_{p,\infty}^s$: pour le voir, on considère l'injection canonique $B_{p,\infty}^s \to \ell^\infty(\mathbf{N})$ qui à f associe $(2^{sj}\, \|\Delta_j f\|_p)_{j\ge 0}$; les espaces $B_{p,q}^s$ $(q < \infty)$ et, a fortiori, $\mathcal{S}$, sont envoyés dans $c_0(\mathbf{N})$; ainsi la fonction

$$f(x) = \sum_{j\ge 0} 2^{-sj} \exp(i\, 2^j x)\psi(x),$$

où $\psi \in L^p$ et $\hat{\psi}$ a un support suffisamment petit n'appartient pas à l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans $B_{p,\infty}^s(\mathbf{R})$. De même, pour $q < \infty$, $\mathcal{S}$ n'est pas dense dans $B_{\infty,q}^s$; considérons par exemple la fonction 1 : on a $\Delta_0 1 = 1$ et $\Delta_j 1 = 0$ pour $j \ge 1$, donc $1 \in B_{\infty,q}^s$; si une suite $(f_k)_{k\ge 0}$ de fonctions de $\mathcal{S}$ tendait vers 1 dans $B_{\infty,q}^s$, on aurait $\Delta_0 f_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 1$ uniformément, ce qui est impossible.

Cela dit, nous allons voir qu'il existe, sur $B_{p,q}^s$, une structure de convergence complète, moins fine que sa structure de Banach, pour laquelle

les fonctions à spectres compacts sont denses dans $B^s_{p,q}$; cette structure très naturelle est d'ailleurs d'un usage constant dans les classes de Hölder (voir l'usage qu'en fait L. Hörmander dans sa version du théorème de Nash-Moser [26]).

Définition 1.- Soit (f_α) une famille filtrante d'éléments de $B^s_{p,q}$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; on dit que f_α converge faiblement vers f si

(i) (f_α) est bornée dans $B^s_{p,q}$;

(ii) il existe $s_1 < s$ et $q_1 \in [1,+\infty]$ tel que $f_\alpha \to f$ dans $B^{s_1}_{p,q_1}$.

L'énoncé suivant résume les propriétés de la convergence faible.

Proposition 4.-

(i) Si (f_α) converge faiblement vers f, on a $f \in B^s_{p,q}$ et, quels que soient $t < s$ et $r \in [1,+\infty]$, f_α converge vers f dans $B^t_{p,r}$.

(ii) $B^s_{p,q}$ est complet pour sa structure faible ; autrement dit, toute famille (f_α), bornée dans $B^s_{p,q}$, de Cauchy dans un $B^{s_1}_{p,q_1}$ $(s_1 < s)$ admet une limite faible.

(iii) Les fonctions à spectres compacts forment une partie faiblement dense de $B^s_{p,q}$.

Preuve de (i) . - Par hypothèse, on a $\|f_\alpha\|_{B^s_{p,q}} \leq A$ $(\forall\ \alpha)$, donc, pour tout $g \in \mathcal{S}$

$$|\langle f_\alpha, g\rangle| \leq A \|g\|_{B^{-s}_{p',q'}} ;$$

mais $f_\alpha \to f$ a fortiori dans $\mathcal{S}'$; on a donc, à la limite

$$|\langle f, g\rangle| \leq A \|g\|_{B^{-s}_{p',q'}} ,$$

ce qui suffit pour que $f \in B^s_{p,q}$, avec une norme majorée par A. Soient $s_1 < t_1 < s$ et $\theta \in]0,1[$ tel que $t_1 = (1-\theta)s_1 + \theta s$; on définit alors $r_1 \in [1,+\infty]$ par l'égalité

$$\frac{1}{r_1} = (1-\theta)\frac{1}{q_1} + \theta\frac{1}{q} \quad ;$$

$B^{t_1}_{p,r_1}$ est l'espace d'interpolation $[B^{s_1}_{p,q_1}, B^s_{p,q}]_{\theta,r_1}$ ([6], théorème 6.4.5) ; on a donc

$$\|f - f_\alpha\|_{B^{t_1}_{p,r_1}} \leq C \|f - f_\alpha\|^{1-\theta}_{B^{s_1}_{p,q_1}} \|f - f_\alpha\|^{\theta}_{B^s_{p,q}}$$

$$\leq 2^\theta C A^\theta \|f - f_\alpha\|^{1-\theta}_{B^{s_1}_{p,q_1}} \quad ;$$

ainsi $f_\alpha \to f$ dans $B^{t_1}_{p,r_1}$: compte tenu des inclusions entre les espaces de Besov, c'est encore vrai pour n'importe quel $t < s$ et $r \in [1,+\infty]$.

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) et du fait que $B^{s_1}_{p,q_1}$ est complet. Enfin, on montre très facilement que la suite

$$f_k = \sum_{j=0}^{k} \Delta_j f$$

converge faiblement vers f dans $B^s_{p,q}$ (d'ailleurs, si p et q appartiennent à $[1,+\infty[$, c'est en norme que f_k converge vers f !).

Remarque.- La convergence faible ainsi définie n'est pas une notion topologique (voir l'annexe I) : il faudrait, pour la décrire, le langage des espaces vectoriels pseudo- ou quasi-topologiques de Frölicher et Bucher [24] ou Bastiani [3].

5.- LA REDUCTION DES SYMBOLES CLASSIQUES .

Nous considérons les symboles $\sigma(x,\xi)$ définis sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, comme des fonctions de ξ prenant leurs valeurs dans certains espaces de Fréchet de fonctions de x.

Si E est un tel espace de Fréchet, m un réel et N un entier positif, on désigne par $CL^m_N(\mathbb{R}^n,E)$ l'espace de Fréchet des applications $f : \mathbb{R}^n \to E$ telles que l'ensemble

$$\{(1+|\xi|)^{|\alpha|-m} f^{(\alpha)}(\xi) / \xi \in \mathbb{R}^n, \ |\alpha| \leq N\}$$

soit borné dans E (les dérivées sont prises au sens des distributions) ; $CL^m(\mathbb{R}^n,E)$ désignera l'espace de Fréchet $\bigcap_{N\in\mathbb{N}} CL^m_N(\mathbb{R}^n,E)$; si E est l'espace des fonctions C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées, $CL^m(\mathbb{R}^n,E)$ n'est autre que la classe de symboles $S^o_{1,0}$ de Hörmander.

A titre d'exemple, considérons une suite bornée $(M_j)_{j\geq o}$ dans E, une fonction $\psi \in \mathcal{D}$ dont le support ne contient pas l'origine, et

$$(13) \qquad f(\xi) = \sum_{j\geq o} 2^{jm} \psi(2^{-j}\xi) M_j \ ;$$

alors $f \in CL^m(\mathbb{R}^n,E)$; plus précisément, quand E est un Banach, la norme de f dans $CL^m_N(\mathbb{R}^n,E)$ est majorée par $C(\sup_{j\geq o} \|M_j\|_E) \|\psi\|_{L^\infty_N}$.

Nous allons voir que tout élément de $CL^m_N(\mathbb{R}^n,E)$, pour N assez grand, s'écrit essentiellement comme une série normalement convergente d'applications du type (13).

Lemme 2.- (Coifman-Meyer [15]). *Pour tout entier pair* N *supérieur à* n, *il existe* $C > 0$ *et* $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k$, *série positive convergente tels que, pour tout* $m \in \mathbb{R}$, *tout espace de Banach* E *et tout* $f \in CL^m_N(\mathbb{R}^n,E)$, *on ait* $f = \tilde{f} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k f_k$, *avec*

(i) $\tilde{f}$ *portée par la boule* $|\xi| \leq \frac{3}{2}$ et

$$\|\tilde{f}^{(\alpha)}(\xi)\|_E \le C\,\|f\| \qquad (|\alpha| \le N) ;$$

(ii) $f_k(\xi) = \sum_{j\ge 1} 2^{jm}\psi_k(2^{-j}\xi)M_{k,j}$, où ψ_k est une fonction C^∞ portée par la couronne $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$ et

$$\|M_{k,j}\|_E \le C\,\|f\| , \quad \|\psi_k^{(\alpha)}\|_\infty \le C \qquad (|\alpha| \le N-n-1).$$

Le schéma de la preuve est le suivant :

1.- On restreint f à chaque couronne dyadique,

2.- par une dilatation de rapport 2^j, on se ramène à des fonctions à support dans le cube $[-\pi,\pi]^n$,

3.- on considère ces fonctions comme des fonctions sur $\mathbb{T}^n$, qu'on développe en série de Fourier.

La norme de f, qui apparaît dans l'énoncé ci-dessus, est la norme dans l'espace $CL^m_N(\mathbf{R}^n,E)$. Utilisons la partition de l'unité du lemme 1, avec $a = 2$, $c = \frac{3}{2}$, $b = \frac{2}{3}$; en multipliant f par l'égalité (3), on obtient

$$f(\xi) = \tilde{f}(\xi) + \sum_{j\ge 1} \phi(2^{-j}\xi)f(\xi) ,$$

où $\tilde{f}$ satisfait la propriété (i) du lemme 2.

La fonction $g_j(\xi) = 2^{-jm}\phi(\xi)f(2^j\xi)$ est portée par la couronne $\frac{2}{3} \le |\xi| \le \frac{3}{2}$ et satisfait

$$(14) \qquad \|g_j^{(\alpha)}(\xi)\|_E \le C\,\|f\| \qquad (|\alpha| \le N).$$

Désignons par $\theta \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ une fonction portée par $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$, valant 1 sur $\frac{2}{3} \le |\xi| \le \frac{3}{2}$; un développement en série de Fourier donne

$$g_j(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{ik.\xi}\theta(\xi)\, C_{k,j} .$$

Posons $u_k = (1 + |k|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, $\psi_k(\xi) = (1 + |k|^2)^{\frac{n+1-N}{2}}\, e^{ik.\xi}\theta(\xi)$,

$M_{k,j} = (1 + |k|^2)^{\frac{N}{2}} C_{k,j}$; alors $\sum_{j\geq 1} \phi(2^{-j}\xi) f(\xi)$ s'écrit

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k \left(\sum_{j\geq 1} 2^{jm} \psi_k(2^{-j}\xi) M_{k,j} \right) .$$

L'estimation de $\psi_k^{(\alpha)}$ $(|\alpha| \leq N - n - 1)$ est immédiate ; celle de $M_{k,j}$ s'obtient en écrivant

$$M_{k,j} = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi|\leq\frac{3}{2}} (I - \Delta)^{\frac{N}{2}} g_j(\xi)\, e^{-ik.\xi}\, d\xi ,$$

et en appliquant (14) ; le terme résiduel $\tilde{f}$ est lui-même susceptible d'une analyse plus poussée :

Lemme 3.- Avec les notations du lemme 2, on peut encore trouver une suite $(\theta_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ de fonctions C^∞, portées par la boule $|\xi| \leq 2$, vérifiant $\|\theta_k^{(\alpha)}\|_\infty \leq C$ pour $|\alpha| \leq N - n - 1$, telles que pour tout $f \in L^\infty_N(\mathbf{R}^n, E)$, portée par la boule $|\xi| \leq \frac{3}{2}$, on ait $f(\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k \theta_k(\xi) C_k$, où $(C_k)_{k\in\mathbb{Z}^n}$ est une famille d'éléments de E vérifiant

$$\|C_k\|_E \leq C \|f\|_{L^\infty_N(\mathbf{R}^n, E)} .$$

6.- UN LEMME ELEMENTAIRE SUR $\ell^q(\mathbf{N})$.

Notre double analyse dyadique (sur les fonctions et sur les symboles) a un but essentiel : ramener les estimations d'opérateurs définis sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ à des estimations d'opérateurs définis sur $s(\mathbf{N})$; la démonstration de l'inégalité (5) est un premier exemple de cette démarche ; en voici un autre, d'un usage permanent dans la suite :

Lemme 4.- Soient E un espace de Banach, $q \in [1, +\infty]$ et $a \in]0,1[$. Il existe une constante $C(a) > 0$ telle que, pour tout $\varepsilon \in \ell^q(\mathbf{N}, E)$, les suites $\eta_k = a^k \sum_{j\leq k} a^{-j}\varepsilon_j$ et $\eta'_k = a^{-k} \sum_{j\geq k} a^j \varepsilon_j$ appartiennent à $\ell^q(\mathbf{N}, E)$;

$\|\eta\|_{\ell^q(\mathbf{N},E)}$ et $\|\eta'\|_{\ell^q(\mathbf{N},E)}$ sont majorées par $C\,\|\varepsilon\|_{\ell^q(\mathbf{N},E)}$.

Par interpolation, il suffit de faire la démonstration pour $q = 1$ et $q = +\infty$; l'inégalité $\|\eta_k\|_E \le a^k \sum_{j\le k} a^{-j} \|\varepsilon_j\|_E$ permet encore de se ramener aux suites $(\varepsilon_j)_{j\ge 0}$ de réels positifs. Alors

$$\eta_k \le \|\varepsilon\|_\infty (a^k \sum_{j\le k} a^{-j}) \le (1-a)^{-1} \|\varepsilon\|_\infty \quad ;$$

d'où $\|\eta\|_\infty \le (1-a)^{-1} \|\varepsilon\|_\infty$.

$\sum_{k=0}^{N} \eta_k = (1-a)^{-1}(\sum_{k=0}^{N+1} \varepsilon_k - \eta_{N+1})$ implique $\sum_{k=0}^{N} \eta_k \le (1-a)^{-1} \|\varepsilon\|_1$ et

$\|\eta\|_1 \le (1-a)^{-1} \|\varepsilon\|_1$. C.Q.F.D.

7.- LES DILATATIONS DANS LES ESPACES DE SOBOLEV .

Il s'agit d'estimer la norme de l'opérateur δ_λ ($\lambda > 0$), considéré comme endomorphisme de $B^s_{p,q}$ ou de H^s_p.

Proposition 5.

(i) δ_λ est un opérateur borné sur $B^s_{p,q}$ ($s > 0$, $p,q \in [1,+\infty]$) et sur H^s_p ($s \ge 0$, $p \in]1,+\infty[$) ; sa norme est majorée par $C\,\lambda^{-n/p}\,(\sup(\lambda,1))^s$.

(ii) δ_λ est un opérateur borné sur $B^0_{p,q}$; sa norme est majorée par $C\lambda^{-n/p}\,(1 + |\mathrm{Log}\,\lambda|)^\alpha$, où $\alpha = \frac{1}{q}$ pour $\lambda > 1$ et $\alpha = 1 - \frac{1}{q}$ pour $\lambda < 1$. (La constante C dépend de n,s,p,q).

Partons de la série de Littlewood-Paley $f = \sum_{j\ge 0} \Delta_j f$ et choisissons $N \in \mathbb{Z}$ de sorte que $2^N \le \lambda < 2^{N+1}$; alors $(\delta_\lambda \Delta_j f)^\wedge$ est portée par la couronne $\frac{2^{N+j}}{2} \le |\xi| \le 4 \cdot 2^{N+j}$, pour $j \ge 1$, et $(\delta_\lambda \Delta_0 f)^\wedge$ par la boule $|\xi| \le 4 \cdot 2^{N+j}$.

a) Le cas $\lambda > 1$.

$$\| \sum_{j\geq 1} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_{B^s_{p,q}} \leq C\Big(\sum_{j\geq 1} 2^{(N+j)sq} \|\delta_\lambda(\Delta_j f)\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \Big(\sum_{j\geq 1} 2^{jsq} \|\Delta_j f\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C'' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

$$\| \sum_{j\geq 1} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_{H^s_p} \leq C \Big\| \Big(\sum_{j\geq 1} 4^{s(N+j)} |\delta_\lambda(\Delta_j f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p$$

$$\leq C' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \Big\| \Big(\sum_{j\geq 1} 4^{sj} |\Delta_j f|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_p$$

$$\leq C'' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{H^s_p} .$$

Il reste à estimer la norme de $\delta_\lambda(\Delta_o f)$, dont le spectre est contenu dans la boule $|\xi| \leq 4 . 2^N$. On observe que $\|\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f)\|_p \leq C \|\delta_\lambda \Delta_o f\|_p =$ $= C \lambda^{-\frac{n}{p}} \|\Delta_o f\|_p \leq C' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B^s_{p,q}}$; d'où

$$\|\delta_\lambda(\Delta_o f)\|_{B^s_{p,q}} \leq C\Big(\sum_{j=o}^{N+2} 2^{sjq} \|\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f)\|_p^q\Big)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B^s_{p,q}} \Big(\sum_{j=o}^{N+2} 2^{sjq}\Big)^{\frac{1}{q}} ;$$

finalement $\Big(\sum_{j=o}^{N+2} 2^{sjq}\Big)^{\frac{1}{q}}$ est équivalent à λ^s pour $s > 0$, et à $(1+\text{Log } \lambda)^{\frac{1}{q}}$ pour $s = 0$.

De même, pour $s > 0$ et $p \in]1,+\infty[$:

$$\|\delta_\lambda(\Delta_o f)\|_{H_p^s} \le C \|(\sum_{j=o}^{N+2} 4^{sj}|\Delta_j(\delta_\lambda\Delta_o f)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$$

$$\le C' \lambda^s \|(\sum_{j=o}^{N+2} |\Delta_j(\delta_\lambda\Delta_o f)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$$

$$\le C'' \lambda^s \|\delta_\lambda(\Delta_o f)\|_p$$

$$\le C''' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{H_p^s} \quad .$$

b) Le cas $\lambda < 1$.

$$\|\sum_{j\ge -N} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_{B_{p,q}^s} \le C(\sum_{j\ge -N} 2^{sq(j+N)}\|\delta_\lambda(\Delta_j f)\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C' \lambda^{s-\frac{n}{p}} (\sum_{j\ge -N} 2^{sjq}\|\Delta_j f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C'' \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s} \quad ;$$

de la même façon $\|\sum_{j\ge -N} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_{H_p^s} \le C \lambda^{s-\frac{n}{p}} \|f\|_{H_p^s}$.

$$\|\sum_{j<-N} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_{B_{p,q}^s} \le C \|\sum_{j<-N} \delta_\lambda(\Delta_j f)\|_p$$

$$\le C' \lambda^{-\frac{n}{p}} \sum_{j<-N} \|\Delta_j f\|_p$$

$$\le C'' \lambda^{-\frac{n}{p}} (\sum_{j<-N} 2^{-sjq'})^{\frac{1}{q'}} (\sum_{j<-N} 2^{sjq}\|\Delta_j f\|_p^q)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le C''' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|f\|_{B_{p,q}^s} (\sum_{j<-N} 2^{-sjq'})^{\frac{1}{q'}}$$

il reste à observer que $\left(\sum_{j<-N} 2^{-sjq'} \right)^{\frac{1}{q'}}$ est $O(1)$ pour $s > 0$ et $O((1 + |\text{Log } \lambda|)^{\frac{1}{q'}})$ pour $s = 0$. C.Q.F.D.

Moyennant des hypothèses supplémentaires sur f, il est possible de supprimer le terme logarithmique, dans le cas $s = 0$; ainsi, on se servira au chapitre IV de l'énoncé suivant :

Corollaire.- Soient $p \in [2,+\infty]$, $q \in [1,+\infty]$ et $p' < r \leq +\infty$; si $f \in B^o_{p,q}$ et $\hat{f} \in L^r$, on a, pour $\lambda > 1$, $\|\delta_\lambda f\|_{B^o_{p,q}} \leq C \lambda^{-\frac{n}{p}} (\|f\|_{B^o_{p,q}} + \|\hat{f}\|_r)$ (la constante C dépend de n,p,q,r).

Avec les notations de la preuve précédente, il s'agit d'estimer $\|\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f)\|_p$; l'hypothèse $p \geq 2$ permet d'utiliser Hausdorff-Young ; on a donc

$$\|\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f)\|_p \leq C \|(\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f))^\wedge\|_{p'}$$

$$\leq C' \lambda^{-\frac{n}{p}} \left(\int |\phi(2^{-j} \lambda \xi)|^{\frac{p'r}{r-p'}} d\xi \right)^{\frac{1}{p'} - \frac{1}{r}} \|\hat{f}\|_r$$

$$\leq C'' \lambda^{\frac{n}{r} - n} 2^{jn(\frac{1}{p'} - \frac{1}{r})} \|\hat{f}\|_r .$$

On a, par hypothèse sur r, $2^{n(\frac{1}{p'} - \frac{1}{r})} > 1$, d'où

$$\|\delta_\lambda(\Delta_o f)\|_{B^o_{p,q}} \leq C \left(\sum_{j=o}^{N+2} \|\Delta_j(\delta_\lambda \Delta_o f)\|_p^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq C' \lambda^{\frac{n}{r} - n} \left(\sum_{j=o}^{N+2} 2^{jqn(\frac{1}{p'} - \frac{1}{r})} \right)^{\frac{1}{q}} \|\hat{f}\|_r$$

$$\leq C'' \lambda^{-\frac{n}{p}} \|\hat{f}\|_r . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

CHAPITRE II - LE CALCUL DES OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS PEU RÉGULIERS

1.- OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS PEU REGULIERS .

Le propos de ce chapitre est une étude systématique des O.P.D. dont les symboles $\sigma(x,\xi)$ sont "classiques" d'ordre quelconque en ξ, hölderien en x ; dans la terminologie du chapitre I, § 4, ce sont les symboles de la classe $CL^m(\mathbf{R}^n,C^r)$ $(r > 0)$. Les valeurs entières de r sont à bien des égards "exceptionnelles" ; dans le seul but d'alléger les énoncés, nous nous écarterons très momentanément de l'usage en convenant ce qui suit :

> Convention pour les paragraphes 1, 2, 3 du présent chapitre : C^r désigne l'espace de Besov $B^r_{\infty,\infty}$, quel que soit $r \in \mathbf{R}$.

Tous les théorèmes énoncés sont encore vrais pour la classe $CL^m_N(\mathbf{R}^n,C^r)$, avec N assez grand ; la formulation précise du lemme 2 permet, dans chaque cas, de calculer N ; c'est encore dans le souci d'alléger que nous nous placerons dans la classe limite $CL^m(\mathbf{R}^n,C^r)$.

Comme dans la théorie classique, le calcul pseudo-différentiel peu régulier s'effectue à l'addition près d'opérateurs régularisants ; mais il convient ici d'adopter une définition très précise de cette notion :

Définition 2.- Soit T un opérateur linéaire de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ et I un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit que T est régularisant d'ordre m sur I, si, pour tous $s \in I$, $p,q \in [1,+\infty]$, il existe $C > 0$ tel que,pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$,

$$\|T(f)\|_{H^{s+m}_p} \leq C \|f\|_{H^s_p} \qquad (1 < p < \infty),$$

$$\|T(f)\|_{B^{s+m}_{p,q}} \leq C \|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

Alors T se prolonge de manière unique en opérateur continu de H^s_p dans

H_p^{s+m} et de $B_{p,q}^s$ dans $B_{p,q}^{s+m}$, du moins pour $p,q \in [1,+\infty[$. Dans les cas $p = +\infty$ ou $q = +\infty$, on est amené à prolonger T en tant qu'opérateur continu pour les structures faibles décrites par la définition 1 ; la possibilité d'un tel prolongement est décrite par la proposition suivante, conséquence immédiate de la proposition 4.

Proposition 6.- Soit T un opérateur linéaire de $\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tous $s \in I$, $p,q \in [1,+\infty]$, T envoie $\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n) \cap B_{p,q}^s$ dans $B_{p,q}^{s+m}$, avec $\|T(f)\|_{B_{p,q}^{s+m}} \leq C(s,p,q) \|f\|_{B_{p,q}^s}$.

Alors pour $p = +\infty$ ou $q = +\infty$ et pour s intérieur à I, T se prolonge de façon unique en un opérateur faiblement continu de $B_{p,q}^s$ dans $B_{p,q}^{s+m}$.

Quand σ appartient, disons à $CL^m(\mathbb{R}^n,L^\infty)$, $Op(\sigma)$ est défini naturellement sur $\hat{\mathcal{E}}'(\mathbb{R}^n)$:

$$Op(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \langle \hat{f}, e^{ix.(.)}\sigma(x,.) \rangle \quad ;$$

aussi la proposition 6 s'appliquera-t-elle systématiquement aux O.P.D.

2.- CONTINUITE DES O.P.D.

Théorème 1.- Pour tout $r > 0$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in CL^m(\mathbb{R}^n,C^r)$, l'opérateur pseudo-différentiel $Op(\sigma)$ est

(i) régularisant d'ordre - m sur l'intervalle $]m-r,m+r[$;

(ii) continu de $B_{p,1}^{m-r}$ dans $B_{p,1}^{-r}$ et de $B_{p,\infty}^{m+r}$ dans $B_{p,\infty}^r$ pour $p \in [1,+\infty]$.

Avant d'aborder la preuve du théorème 1, il n'est pas inutile de comprendre la signification de l'intervalle $]m-r,m+r[$. Cet intervalle est le plus grand possible et c'est uniquement la régularité en x qui l'empêche d'être plus grand ; nous construirons en effet des contre-exemples avec des symboles triviaux $\sigma(x,\xi) = g(x)\phi(\xi)$. L'idée en est très simple : quand $g \in C^r$ et

et $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gf ne peut appartenir génériquement à $C^{r+\varepsilon}$ et, par dualité, g ne peut opérer sur les distributions de classe C^{-r}.

Nous allons d'abord construire $\sigma \in \bigcap_{m \in \mathbb{R}} CL^m(\mathbb{R}, C^r)$ tel que $O(\sigma)$ n'envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ni dans $C^{r+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$, ni dans H^r.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, à spectre dans $[0, \frac{1}{6}]$, et $\phi = \psi * \psi$; on pose

$$(1) \qquad g(x) = \sum_{j \geq 0} 2^{-jr} \exp(i\, 2^j x)\phi(x) \ ;$$

ainsi $g \in C^r$ et $\sigma(x,\xi) = g(x)\hat{\psi}(\xi)$ appartient à $CL^m(\mathbb{R}, C^r)$, quel que soit $m \in \mathbb{R}$. Alors

$$Op(\sigma)(\psi)(x) = \sum_{j \geq 0} 2^{-jr} \exp(i\, 2^j x)\phi^2(x) \ ;$$

la somme obtenue est évidemment une série de Littlewood-Paley de $Op(\sigma)(\psi)$, qui ne peut donc appartenir ni à $C^{r+\varepsilon}$, ni à H^r.

Voici maintenant $\sigma \in CL^m(\mathbb{R}, C^r)$ tel que $Op(\sigma)$ n'ait pas d'extension bornée comme opérateur de C^{m-r} dans $\mathcal{D}'$.

On pose $\sigma(x,\xi) = g(x)\,(1 + |\xi|^2)^{m/2}$, où g est la fonction (1). Il nous suffira de trouver une suite (f_ν) bornée dans C^{-r}, telle que $(g f_\nu)$ ne le soit pas dans $\mathcal{D}'$. Soit

$$f_\nu(x) = \sum_{k=1}^{\nu+1} 2^{kr} \exp(-i\, 2^k x)\phi(x) \ ;$$

alors $g f_\nu = \nu\phi^2 + a_\nu + b_\nu$, où

$$a_\nu = \sum_{k=1}^{\nu+1} \Big\{ \sum_{j=0}^{k-1} 2^{(k-j)r} \exp(i(2^j - 2^k)x)\phi^2(x) \Big\} \ ,$$

$$b_\nu = \sum_{j \geq 0} \Big\{ \sum_{k=0}^{\inf(\nu+1, j-1)} 2^{(k-j)r} \exp(i(2^j - 2^k)x)\phi^2(x) \Big\} \ .$$

Il nous reste à voir que (a_ν) et (b_ν) sont des suites bornées de distributions.

Dans a_ν, le terme entre accolades a son spectre dans l'intervalle $[-2^k, -\frac{2^k}{4}]$ et sa norme L^∞ majorée par $C\,2^{kr}$; (a_ν) est donc une suite bornée dans C^{-r}.

Dans b_ν, le terme entre accolades a son spectre dans l'intervalle $[\frac{2^j}{2}, 2 \cdot 2^j]$ et sa norme L^∞ uniformément majorée en ν, (b_ν) est donc une suite bornée dans $B^0_{\infty,\infty}$. C.Q.F.D.

Voyons maintenant la preuve du théorème 1 ; l'application des lemmes 2 et 3 permet de se limiter aux symboles des types suivants :

$$\sigma(x,\xi) = M(x)\theta(\xi) \ , \quad \text{où } M \in C^r \text{ et } \theta \in \mathcal{D} \ , \tag{2}$$

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 1} 2^{jm} M_j(x)\phi(2^{-j}\xi) \ , \tag{3}$$

où $(M_j)_{j\geq 0}$ est une suite bornée dans C^r et $\phi \in \mathcal{D}$ est portée par la couronne $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$.

Dans ce qui suit, on notera $\Gamma_j(c)$ la couronne $c^{-1}2^j \leq |\xi| \leq c\,2^j$ $(j \geq 1)$ et $\Gamma_0(c)$ la boule $|\xi| \leq c$. C, C' ... désignera une constante positive, dépendant en général de s,m,p,q,r,n, ainsi que des fonctions θ et ϕ, et dont la valeur peut changer d'une occurence à l'autre.

A.- Le cas des symboles à support compact du type (2).

Dans ce cas, $Op(\sigma)(f)$ a la même régularité que σ (en x), aussi irrégulier que soit f ; plus précisément :

Lemme 5.- Si $M \in C^r$ et $\theta \in \mathcal{D}$, l'O.P.D. de symbole $M(x)\theta(\xi)$ envoie $L^p_{-\infty}$ dans $B^r_{p,\infty}$.

On a en effet, quel que soit $s \in \mathbb{R}$,

$$\|\theta(D)f\|_p \leq C \|f\|_{B^s_{p,q}} \ ;$$

écrivons $M = \sum_{j\geq 0} M_j$, où $\hat{M}_j$ est portée par Γ_j (2) et

$\|M_j\|_\infty \leq C\, 2^{-jr} \|M\|_{C^r}$; $M_j \cdot \theta(D)f$ ayant son spectre dans une boule $|\xi| \leq \gamma \cdot 2^j$, la proposition 2 donne

$$\|M \cdot \theta(D)f\|_{B^r_{p,\infty}} \leq C \sup_{j\geq o} 2^{jr} \|M_j \cdot \theta(D)f\|_p$$

$$\leq C' \|M\|_{C^r} \|f\|_{B^s_{p,q}} . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

B.- Le cas des symboles réduits du type (3).

En posant $f_j = \phi(2^{-j}D)f$, on a $Op(\sigma)(f) = \sum_{j\geq 1} 2^{jm} M_j f_j$; dès lors l'estimation de $Op(\sigma)(f)$ est une conséquence de la proposition 2 (i) et du lemme de presque-orthogonalité suivant :

Lemme 6.- Pour tous $m \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $s \in]m-r\ ,\ m+r[$ et $c > 1$, il existe $C > 0$ tel que, pour toute suite $(f_j)_{j\geq 1}$ de fonctions à spectres respectifs dans $\Gamma_j(c)$ et toute suite $(M_j)_{j\geq 1}$ telle que $A = \sup_{j\geq 1} \|M_j\|_{C^r} < +\infty$, on ait

$$(4) \qquad \|\sum_{j\geq 1} 2^{jm} M_j f_j\|_{H^{s-m}_p} \leq C A \|(\sum_{j\geq 1} 4^{sj} |f_j|^2)^{1/2}\|_p \qquad (1 < p < \infty) ,$$

$$(5) \qquad \|\sum_{j\geq 1} 2^{jm} M_j f_j\|_{B^{s-m}_{p,q}} \leq C A \|(2^{sj} \|f_j\|_p)_{j\geq 1}\|_{\ell^q(\mathbb{N})} .$$

L'inégalité (5) est encore vraie dans les deux cas suivants : $s = m - r$ et $q = 1$, $s = m + r$ et $q = +\infty$. Les inégalités (4) et (5) sont encore vraies si on suppose seulement que $\hat{f}_j$ est portée par la boule $|\xi| \leq c \cdot 2^j$, à condition d'imposer $s \in]m, m+r[$.

Les inégalités (4) et (5) signifient que les fonctions M_j, uniformément lisses, peuvent être remplacées par la fonction 1 - auquel cas on retrouve l'"orthogonalité ordinaire" de la proposition 2 ; de plus, les M_j doivent être d'autant plus lisses que l'ordre s est plus élevé ; c'est la signification de la condition $r > |s - m|$.

En posant $f'_j = 2^{jm} f_j$, on se ramène immédiatement au cas $m = 0$. Choisissons

$c' > c$ et N entier de façon que $\Gamma_j(c) + \{\xi \,/\, |\xi| \leq 2 \cdot 2^k\} \subset \Gamma_j(c')$ quand $k < j - N$ et $\{\xi \,/\, |\xi| \leq c \cdot 2^j\} + \Gamma_k(2) \subset \Gamma_k(3)$ quand $k > j + N$.

M_j s'écrit $\sum_{k \geq o} M_{j,k}$, où $\hat{M}_{j,k}$ est portée par $\Gamma_k(2)$ et $\|M_{j,k}\|_\infty \leq C A 2^{-kr}$. $\sum_{j \geq 1} M_j f_j$ est alors la somme des distributions suivantes

$$g_1 = \sum_k \{ \sum_{j<k-N} M_{j,k} f_j \} \quad ,$$

$$g_2 = \sum_j f_j \{ \sum_{k<j-N} M_{j,k} \} \quad ,$$

$$g_3 = \sum_j M_{j,j+\nu} f_j \qquad (\nu = -N, \ldots, N).$$

Chaque g_i relève dela proposition 2 (ii) et (iii).

1°.- Dans g_1, le terme général en k a son spectre dans $\Gamma_k(3)$; ainsi

$$(6) \quad \begin{cases} \|g_1\|_{H_p^t} \leq C A \, \| (\sum_k 4^{(t-r)k} \, | \sum_{j<k-N} 2^{-js} (2^{js} f_j)|^2)^{\frac{1}{2}} \|_p \\ \|g_1\|_{B_{p,q}^t} \leq C A \, \| (2^{(t-r)k} \, (\sum_{j<k-N} 2^{-js} (2^{js} \, \|f_j\|_p))_{k \geq o} \|_{\ell^q} \end{cases} .$$

On distingue alors 3 cas :

a) Pour $s < 0$, on applique le lemme 4 en faisant $t = s + r$, alors $\|g_1\|_{H_p^{s+r}}$ et $\|g_1\|_{B_{p,q}^{s+r}}$ sont majorés, respectivement, par les seconds membres de (4) et (5) ; on conclut à l'aide des inclusions

$$H_p^{s+r} \subset H_p^s \quad , \quad B_{p,q}^{s+r} \subset B_{p,q}^s \quad .$$

b) Pour $s = 0$, on fait $t = 0$ dans (6). On a pour chaque x,

$$| \sum_{j<k-N} f_j(x)|^2 \leq C k \sum_{j<k-N} |f_j(x)|^2 \quad ; \quad \text{d'où}$$

$$\sum_k 4^{-rk} \, | \sum_{j<k-N} f_j(x)|^2 \leq C \sum_j |f_j(x)|^2 \quad ;$$

en intégrant, on obtient $\|g_1\|_p \leq CA \|(\sum_j |f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$. De même

$$\|g_1\|_{B^o_{p,q}} \leq CA \|2^{-rk} k^{1/q'} (\sum_{j<k-N} \|f_j\|_p^q)^{1/q}\|_{\ell^q}$$

$$\leq C'A \|(\|f_j\|_p)_{j\geq 1}\|_{\ell^q} .$$

c) Pour $0 < s < r$, on fait $t = s$ dans (6). Alors pour chaque x,

$$|\sum_{j<k-N} 2^{-js}(2^{js} f_j(x))|^2 \leq C \sum_{j=1}^{\infty} 4^{js} |f_j(x)|^2, \quad \text{d'où}$$

$$\sum_k 4^{(s-r)k} |\sum_{j<k-N} f_j(x)|^2 \leq C \sum_{j=1}^{\infty} 4^{js} |f_j(x)|^2 , \quad \text{et}$$

$$\|g_1\|_{H^s_p} \leq CA \|(\sum_j 4^{js} |f_j|^2)^{1/2}\|_p .$$

On a également

$$\sum_{j<k-N} 2^{-js}(2^{js} \|f_j\|_p) \leq \|(2^{-js})_{j\geq 1}\|_{\ell^{q'}} \cdot \|(2^{js} \|f_j\|_p)_{j\geq 1}\|_{\ell^q} ,$$

d'où

$$\|g_1\|_{B^s_{p,q}} \leq CA \|(2^{js} \|f_j\|_p)_{j\geq 1}\|_{\ell^q} .$$

La dernière inégalité est encore vraie pour $s = r$ et $q = +\infty$.

2°.- Pour estimer g_2, on part de $\|\sum_{k<j-N} M_{j,k}\|_\infty \leq CA$; le terme général en j ayant son spectre dans $\Gamma_j(c')$, on en déduit aussitôt les inégalités (4) et (5) avec $\|g_2\|_{H^s_p}$ et $\|g_2\|_{B^s_{p,q}}$ au premier membre.

(Remargue : dans la terminologie de J.M. Bony [8], l'opérateur $f \longmapsto g_2$ est appelé opérateur para-différentiel de symbole $\sigma(x,\xi)$; c'est précisément la simplicité de l'estimation de g_2 qui est au point de départ de la théorie de Bony).

3°.- Le terme général de g_3 est porté par une boule $|\xi| \leq C\,2^j$; on a alors, pour $s+r > 0$,

$$\|g_3\|_{H_p^{s+r}} \leq C \,\|(\sum_j 4^{(s+r)j} |M_{j,j+\nu} f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p$$

$$\leq C'\,A\,\|(\sum_j 4^{sj}|f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \quad \text{et}$$

$$\|g_3\|_{B_{p,q}^{s+r}} \leq C\,\|(2^{(s+r)j}\,\|M_{j,j+\nu} f_j\|_p)\|_{\ell^q}$$

$$\leq C'\,A\,\|(2^{sj}\,\|f_j\|_p)\|_{\ell^q} \ .$$

Quand $s = -r$ et $q = 1$, on a

$$\|M_{j,j+\nu} f_j\|_p \leq C\,A\,2^{-jr}\,\|f_j\|_p \quad ;$$

alors g_3 s'estime comme une série normalement convergente dans L^p :

$$\|g_3\|_p \leq C\,A \sum_{j\geq 1} 2^{-jr}\,\|f_j\|_p \quad ;$$

on conclut à l'aide de l'inégalité banale $\|g_3\|_{B_{p,1}^{-r}} \leq C\,\|g_3\|_p$.

Dans le cas où les $\hat{f}_j$ sont portées respectivement par $|\xi| \leq c\,.\,2^j$, il n'y a plus lieu de distinguer entre g_2 et g_3 ; on écrit $g_3 = \sum_j f_j \{\sum_{k\leq j+N} M_{j,k}\}$

Le terme général de g_3 ayant son spectre dans une boule $|\xi| \leq C\,.\,2^j$, on a aussitôt, pour $s > 0$,

$$\|g_3\|_{H_p^s} \leq C\,A\,\|(\sum_j 4^{sj}|f_j|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \quad ,$$

$$\|g_3\|_{B_{p,q}^s} \leq C\,A\,\|(2^{sj}\,\|f_j\|_p)_{j\geq o}\|_{\ell^q} \ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

3.- COMPOSITION ET ADJONCTION DES O.P.D.

Si σ et τ sont deux symboles classiques d'ordre 0, on sait que l'opérateur

$$R_\nu = Op(\sigma) \circ Op(\tau) - \sum_{|\alpha|\leq\nu} \cdot \frac{1}{\alpha!} Op(\partial_\xi^\alpha \sigma \, . \, D_x^\alpha \tau)$$

est lui-même un O.P.D. classique d'ordre $-\nu - 1$, ce qui implique automatiquement des estimations sur R_ν. Quand σ et τ sont des symboles peu réguliers en x, R_ν n'est plus un O.P.D. (qu'on pense, par exemple, aux commutateurs de Calderón [11]) ; nous allons voir cependant que, sous certaines hypothèses, R_ν est un opérateur régularisant.

Théorème 2.- Soient $\nu \in \mathbf{N}$, m_1 et m_2 deux réels, r_1 et $r_2 \geq \nu$ deux réels positifs, $r_3 = \inf(r_2, \nu+1)$. On suppose que $\sigma \in CL^{m_1}(\mathbf{R}^n, C^{r_1})$ et $\tau \in CL^{m_2}(\mathbf{R}^n, C^{r_2})$ - quand $r_2 \in \mathbf{N}^*$, cette hypothèse est remplacée par $\tau \in CL^{m_2}(\mathbf{R}^n, L^\infty_{r_2})$.

Dès que $m_1 < r_1 + r_2$ l'opérateur R_ν envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; il est alors régularisant d'ordre $r_3 - m_1 - m_2$ sur l'intervalle $]s_0, s_1 - r_3 + m_1 + m_2[$, où $s_0 = \sup(m_2 - r_2, m_2 + m_1 - r_1 - \nu - 1, m_2 + m_1 - r_2)$ et $s_1 = \inf(r_1, r_2 - m_1, r_2 - \nu)$.

Commentaire : 1°.- Un intervalle aussi tarabiscoté que $]s_0, s_1 - r_3 + m_1 + m_2[$ n'aurait pas d'intérêt s'il n'était le plus grand possible : or il l'est (voir les contre-exemples).

2°.- Quant à la philosophie du théorème 2, elle est claire : dès qu'on travaille avec des O.P.D. peu réguliers, on est contraint au choix suivant : régulariser peu sur un grand intervalle ou beaucoup sur un petit intervalle. Illustrons cette remarque par un exemple : prenons $r_1 = r_2 = \frac{3}{2}$, $m_1 = m_2 = 0$; quand $\nu = 0$, R_ν est régularisant d'ordre 1 sur l'intervalle $]-\frac{3}{2}, 0[$, quand $\nu = 1$, R_ν est régularisant d'ordre $\frac{3}{2}$ sur l'intervalle $]-\frac{3}{2}, -1[$.

Comme le lecteur s'attend à un théorème sur l'adjoint, il est inutile de le faire patienter davantage.

Théorème 3.- Soient $m \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{N}$, r un réel positif supérieur à ν, $r_1 = \inf(r, \nu+1)$. On suppose que $\sigma \in CL^m(\mathbb{R}^n, C^r)$, pour $r \notin \mathbb{N}$, et que $\sigma \in CL^m(\mathbb{R}^n, L^\infty_r)$, pour $r \in \mathbb{N}$. On a alors

$$Op(\sigma)^* = \sum_{|\alpha| \le \nu} \frac{1}{\alpha!} Op(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{\sigma}) + \rho_\nu ,$$

où ρ_ν est régularisant d'ordre $r_1 - m$ sur l'intervalle $]s_0, s_1 - r_1 + m[$; ici $s_0 = \sup(m-r, -r)$ et $s_1 = \inf(r-m, r-\nu)$.

A.- Démonstration du théorème 2 : la condition $m_1 < r_1 + r_2$.

On a $\partial_\xi^\alpha \sigma \, . \, D_x^\alpha \tau \in CL^{m_1+m_2-|\alpha|}(\mathbb{R}^n, C^{\inf(r_1, r_2-|\alpha|)})$; du théorème 1, il découle immédiatement que $Op(\partial_\xi^\alpha \sigma \, . \, D_x^\alpha \tau)$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans L^∞ (au moins !). $Op(\tau)$ envoie $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans C^{r_2} - et c'est le meilleur résultat possible (voir le premier contre-exemple du théorème 1) ; $Op(\sigma)$ envoie C^{r_2} dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ seulement si $r_2 > m_1 - r_1$ (second contre-exemple du théorème 1).

C.Q.F.D.

B.- Démonstration du théorème 2 : cas où l'un des symboles est à support compact en ξ.

L'estimation est triviale - au sens où R_ν est étudié terme à terme - cependant, elle fait déjà apparaître s_1 comme la régularité maximale.

1°.- Si σ ou τ est à support compact, le symbole $\partial_\xi^\alpha \sigma \, . \, D_x^\alpha \tau$ l'est aussi ; par ailleurs, il est de classe $C^{\inf(r_1, r_2-|\alpha|)}$ en x ; d'après le lemme 5, $Op(\partial_\xi^\alpha \sigma \, . \, D_x^\alpha \tau)$ envoie $L^p_{-\infty}$ dans $B^r_{p,\infty}$ où $r = \inf(r_1, r_2-|\alpha|) \ge s_1$.

2°.- Si τ est à support compact, $Op(\tau)$ envoie $L^p_{-\infty}$ dans $B^{r_2}_{p,\infty}$; par le théorème 1, $Op(\sigma)$ envoie $B^{r_2}_{p,\infty}$ dans $B^{r_2-m_1}_{p,\infty}$, ceci pour $r_2 > m_1 - r_1$; ici encore $r_2 - m_1 \ge s_1$.

3°.- Supposons σ à support compact : dès que $s > m_2 - r_2$, $Op(\tau)$ envoie $B^s_{p,q}$ et H^s_p dans $L^p_{-\infty}$ (c'est une version très affaiblie du théorème 1 !) ; quant à $Op(\sigma)$, il envoie $L^p_{-\infty}$ dans $B^{r_1}_{p,\infty}$.

C.- Démonstration du théorème 2: cas où les deux symboles sont réduits.

En multipliant $\tau(x,\xi)$ par $(1+|\xi|^2)^{-\frac{m_2}{2}}$, on se ramène au cas où $m_2 = 0$ (c'est la seule réduction commode : multiplier $\sigma(x,\xi)$ par $(1+|\xi|^2)^{-\frac{m_1}{2}}$ conduirait à démontrer préalablement le théorème 2 dans le cas où l'un des symboles est $(1+|\xi|^2)^{\frac{m_1}{2}}$) ; ainsi nous poserons $m_1 = m$ et

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 1} 2^{jm} M_j(x)\phi(2^{-j}\xi)$$

$$\tau(x,\xi) = \sum_{j\geq 1} N_j(x)\psi(2^{-j}\xi) \quad ,$$

où (M_j) et (N_j) sont des suites bornées dans C^{r_1} et C^{r_2}, respectivement, et ϕ, ψ sont des fonctions C^∞ portées par $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$. On a alors

$$R_\nu(f) = \sum_j \sum_k 2^{jm} M_j \cdot \mathscr{L}_j(N_k)(f_k) \quad ,$$

où $\mathscr{L}_j(N)$ désigne l'opérateur

$$f \longmapsto \phi(2^{-j}D)(Nf) - \sum_{|\alpha|\leq\nu} \frac{2^{-j|\alpha|}}{\alpha!} D^\alpha N \cdot \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f)$$

et $f_k = \psi(2^{-k}D)f$. Enfin, nous noterons I l'intervalle $]s_0, s_1 + m - r_3[$.

Notre but est d'appliquer à $R_\nu(f)$ la proposition 2, ou sa version presque-orthogonale, le lemme 6. Pour cela, il nous faut localiser très précisément le spectre du terme général $\mathscr{L}_j(N_k)(f_k)$. Si le spectre de N est "petit" devant 2^j, disons contenu dans $|\xi| \leq \frac{2^j}{6}$, celui de $\mathscr{L}_j(N)(f)$ est contenu dans la couronne $\Gamma_j(3)$; si, au contraire, le spectre de N est "trop gros", il n'y a plus lieu d'utiliser l'opérateur $\mathscr{L}_j(N)$ et l'on estime séparément les termes en $\phi(2^{-j}D)(Nf)$ et ceux en $D^\alpha N \cdot \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f)$.

On pose $N_k = \sum_{\ell\geq 0} N_{k,\ell}$ où $\hat{N}_{k,\ell}$ est portée par $\frac{2^\ell}{8} \leq |\xi| \leq \frac{2^\ell}{3}$ ($|\xi| \leq \frac{1}{3}$ dans le cas $\ell = 0$) et $\|N_{k,\ell}\|_\infty \leq C\, 2^{-\ell r_2}$; alors

1°.- pour $\ell < j$, $\mathscr{L}_j(N_{k,\ell})(f_k)$ a son spectre dans la couronne $\Gamma_j(3)$ et s'annule pour $|k-j| \geq 3$.

2°.- pour $\ell \geq j+5$, $\phi(2^{-j}D)(N_{k,\ell} f_k) = 0$ dès que $k \leq \ell - 6$ ou $k \geq \ell$.

Dès lors on écrit $R_\nu(f)$ comme combinaison linéaire des distributions suivantes :

$$g_1 = \sum_j 2^{jm} M_j \mathscr{L}_j\Big(\sum_{\ell<j} N_{j+\lambda,\ell}\Big)(f_{j+\lambda}) \qquad (-2 \leq \lambda \leq +2),$$

$$g_2 = \sum_j 2^{jm} M_j \phi(2^{-j}D)\Big(\sum_{\ell\geq j+5} N_{\ell+\lambda,\ell} f_{\ell+\lambda}\Big) \qquad (-5 \leq \lambda \leq -1),$$

$$g_3 = \sum_{\substack{j \\ \ell\geq j+5}} 2^{j(m-|\alpha|)} M_j . N^{(\alpha)}_{j+\lambda,\ell} \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f_{j+\lambda}) \qquad (-1 \leq \lambda \leq +1) \ ;$$

$$g_4 = \sum_j 2^{jm} M_j . \phi(2^{-j}D)\Big(\sum_{k\leq j+3} N_{k,j+\lambda} f_k\Big) \qquad (0 \leq \lambda \leq 4),$$

$$g_5 = \sum_j 2^{j(m-|\alpha|)} M_j . N^{(\alpha)}_{j+\mu,j+\lambda} \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f_{j+\mu}) \qquad (0 \leq \lambda \leq 4 \ , \ -1 \leq \mu \leq 1).$$

A l'aide d'un changement de notation implicite, on peut supposer que les entiers λ et μ sont nuls.

1°.- Etude de l'opérateur $\mathscr{L}_j(N)$.

On a $\mathscr{L}_j(N)(f)(x) = \int \check{\phi}(t) K_j(x,t) f(x-2^{-j}t)dt$, où $K_j(x,t) = N(x-2^{-j}t) - \sum_{|\alpha|\leq\nu} \frac{1}{\alpha!} N^{(\alpha)}(x)(-2^{-j}t)^\alpha$. Si $N \in C^{r_2}$ (resp. à $L^\infty_{r_2}$ quand $r_2 \in \mathbf{N}$), on obtient $|N^{(\alpha)}(x+h) - N^{(\alpha)}(x)| \leq \|N\| \, |h|^{r_3-\nu}$ ($|\alpha| = \nu$), d'où

$$|K_j(x,t)| \leq C 2^{-jr_3} |t|^{r_3} \|N\|. \qquad \text{et}$$

$$(7) \qquad \|\mathscr{L}_j(N)(f)\|_p \leq \{C 2^{-jr_3} \|N\| \int |\check{\phi}(t)| \, |t|^{r_3} dt\} \, \|f\|_p \qquad (1 \leq p \leq +\infty).$$

Supposons maintenant que $(N_j)_{j\geq 1}$ soit une suite bornée dans C^{r_2} ou $L^\infty_{r_2}$;

alors, avec les notations de la proposition 3, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$,

$$(8)\quad |2^{r_3 j}\mathcal{L}_j(N_j)(f_j)(x)| \le C(\sup_j \|N_j\|)\Big(\int |\check{\phi}(t)|\,|t|^{r_3}(1+|t|)^n dt\Big)\omega_j(x).$$

La constante C des inégalités (7) et (8) ne dépend que de n et de ν.

2°.- Estimation de g_1 .

La suite $(\sum_{\ell<j} N_{j,\ell})_{j\ge 1}$ étant bornée dans C^{r_2} (resp. $L^\infty_{r_2}$), on peut appliquer les inégalités (7) et (8) et l'inégalité maximale de Peetre (prop. 3) :

$$\|(2^{(r_3+s)j}\,\|\,\mathcal{L}_j(\sum_{\ell<j} N_{j,\ell})(f_j)\|_p)_{j\ge o}\|_{\ell^q} \le C\,\|f\|_{B^s_{p,q}}\quad,$$

$$\|(\sum_j 4^{(r_3+s)j}\,|\,\mathcal{L}_j(\sum_{\ell<j} N_{j,\ell})(f_j)|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \le C\,\|f\|_{H^s_p}\quad.$$

Du lemme 6, on tire alors $\|g_1\|_{B^{s+r_3-m}_{p,q}} \le C\,\|f\|_{B^s_{p,q}}$ et

$\|g_1\|_{H_p^{s+r_3-m}} \le C\,\|f\|_{H^s_p}$ pour tout s dans l'intervalle $]m-r_1-r_3, m+r_1-r_3[$,

lequel contient I.

3°.- Estimation de g_2 .

Posons $u_j = \phi(2^{-j}D)(\sum_{\ell\ge j+5} N_{\ell,\ell} f_\ell)$; puisque $s \in I$, on a, a fortiori, $s > -r_2$; le lemme 4 et le théorème des multiplicateurs de Marcinkiewicz ([6], 6.1.6) donnent alors

$$(9)\quad \begin{cases} \|(2^{(r_2+s)j}\,\|u_j\|_p)_{j\ge 1}\|_{\ell^q} \le C\,\|f\|_{B^s_{p,q}}\quad, \\ \|(\sum_j 4^{(r_2+s)j}\,|u_j|^2)^{1/2}\|_p \le C\,\|f\|_{H^s_p}\quad. \end{cases}$$

Par le lemme 6, g_2 appartient donc à $B^{s+r_2-m}_{p,q}$ ou a $H_p^{s+r_2-m}$, pour tout $s \in]\sup(m-r_1-r_2,-r_2), m+r_1-r_2[$.

4°.- Estimation de g_4.

Posons $u_j = \phi(2^{-j}D)\Big(\sum_{k\le j+3} N_{k,j} f_k\Big)$. On distingue deux cas :

- pour $s < 0$, $(u_j)_{j\ge 1}$ vérifie encore les inégalités (9) ; on conclut alors comme dans le 3° ;

- pour $s \ge 0$, on a

$$\|(2^{tj}\|u_j\|_p)_{j\ge1}\|_{\ell^q} \le C\|f\|_{B^s_{p,q}} \quad \text{et}$$

$$\|(\Sigma_j 4^{tj}|u_j|^2)^{1/2}\|_p \le C\|f\|_{H^s_p} ,$$

avec $t = r_2$ pour $s > 0$ et $t < r_2$ pour $s = 0$.

Le lemme 6 donne alors $g_4 \in B^{t-m}_{p,q}$ ou H^{t-m}_p, pour tout $m - r_1 < t < m + r_1$; on conclut à l'aide des hypothèses $m < r_1 + r_2$ et $s_1 \le \inf(r_1, r_2 - m)$.

5°.- Estimation de g_5.

Posons $u_j = N^{(\alpha)}_{j,j} \cdot \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f_j)$; alors $\hat{u}_j$ est portée par une boule $|\xi| \le C\,2^j$ et l'on peut encore appliquer le lemme 6. On a

$$\|(2^{(r_2+s-|\alpha|)j}\|u_j\|_p)_{j\ge1}\|_{\ell^q} \le C\|f\|_{B^s_{p,q}} \quad \text{et}$$

$$\|(\sum_{j\ge1} 4^{(r_2+s-|\alpha|)j}|u_j|^2)^{1/2}\|_p \quad C\|f\|_{H^s_p} .$$

Ainsi g_5 appartient à $B^{s+r_2-m}_{p,q}$ ou à $H^{s+r_2-m}_p$ pour $s \in]m - r_2, m - r_2 + r_1[$; on remarque alors que $s_o \ge m - r_2$ et $s_1 \le r_1$.

6°.- Estimation de g_6.

Ici, il n'est pas possible d'appliquer le lemme 6 ; en effet, $u_{j,\ell} = N^{(\alpha)}_{j,\ell}\ \phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f_j)$ (pour $\ell \ge j+5$) a son spectre dans la couronne

$\frac{2^\ell}{16} \le |\xi| \le \frac{2^\ell}{2}$.

On écrit alors $M_j = \sum_{k\ge o} M_{j,k}$, où $\hat{M}_{j,k}$ est portée par $\Gamma_k(2)$ et $\|M_{j,k}\|_\infty \le C\, 2^{-kr_1}$; g_3 est la somme des distributions

$$g_6 = \sum_\ell \{ \sum_{\substack{j\le \ell-5 \\ k\le \ell-5}} 2^{j(m-|\alpha|)} M_{j,k} u_{j,\ell} \} ,$$

$$g_7 = \sum_k \{ \sum_{\substack{j\le \ell-5 \\ \ell\le k-1}} 2^{j(m-|\alpha|)} M_{j,k}\, u_{j,\ell} \} ,$$

$$g_8 = \sum_\ell \{ \sum_{j\le \ell-5} 2^{j(m-|\alpha|)} M_{j,\ell+\mu}\, u_{j,\ell} \} \qquad (\mu = -4,\dots,0) .$$

On a $\|u_{j,\ell}\|_p \le C\, 2^{(|\alpha|-r_2)\ell - sj} \varepsilon_j \|f\|_{B^s_{p,q}}$, où $\|(\varepsilon_j)_{j\ge 1}\|_{\ell^q} \le 1$;

Le terme général (en ℓ) de g_6 a son spectre dans la couronne $\Gamma_\ell(32)$ et sa norme L^p majorée par $C\, 2^{(|\alpha|-r_2)\ell} \sum_{j\le \ell-5} 2^{j(m-|\alpha|-s)} \varepsilon_j \|f\|_{B^s_{p,q}}$; dès lors g_6 appartient à $B^{s+r_2-m}_{p,q}$ pour $s < m-|\alpha|$ et à $B^{r_2-|\alpha|}_{p,\infty}$ dans le cas contraire.

Le terme général (en k) de g_7 a son spectre dans la couronne $\Gamma_k(4)$ et sa norme L^p majorée par $C\, 2^{-r_1 k} \sum_{\ell\le k-1} 2^{(|\alpha|-r_2)\ell} \{ \sum_{j\le \ell-5} 2^{j(m-|\alpha|-s)} \varepsilon_j \} \|f\|_{B^s_{p,q}}$; la condition $s > s_o \ge m - r_2$ entraîne alors $g_7 \in B^{r_1}_{p,\infty}$.

Le terme général (en ℓ) de g_8 a son spectre dans une boule $|\xi| \le C \cdot 2^\ell$ et sa norme L^p majorée par $C\, 2^{(|\alpha|-r_2-r_1)\ell} \sum_{j\le \ell-5} 2^{j(m-|\alpha|-s)j} \varepsilon_j \|f\|_{B^s_{p,q}}$.

Ainsi, pour $m - r_1 - r_2 < s < m - |\alpha|$, on a $g_8 \in B^{s+r_1+r_2-m}_{p,q}$; pour $s \ge m - |\alpha|$, on a $g_8 \in B^{r_1+r_2-|\alpha|}_{p,\infty}$.

Les estimations en normes H^s_p s'obtiennent de façon analogue.

D.- Contre-exemples au théorème 2.

a) On montre d'abord que s_1 est bien la régularité maximale à laquelle $R_\nu(f)$ peut prétendre, même si $f \in \mathcal{S}$.

1°.- Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, à spectre dans $[\frac{1}{8}, \frac{1}{4}]$, $\phi = \psi * \psi$, $\theta = \phi^2 * \phi^2$.

On pose $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-jr_1} \exp(i\,2^j x)\theta(x)\hat{\phi}^2(\xi)$ et $\tau(x,\xi) = \phi(x)\hat{\psi}(\xi)$.

Dans $R_\nu(\psi)$, le terme $\sum_{|\alpha|\leq\nu}$ ... est nul ; on trouve donc $R_\nu(\psi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-jr_1} \exp(i\,2^j x)\theta^2$ qui n'appartient ni à H^{r_1}, ni à $C^{r_1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

2°.- On pose $\sigma(x,\xi) = \phi(\xi)$, où ϕ est C^∞, à support dans $[0, \frac{1}{3}]$; $\tau(x,\xi) = [\sum_{j\geq 0} 2^{-jr_2} \exp(i\,2^j x)]\phi^{(\nu)}(\xi)$.

Nous allons voir que R_ν n'envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ ni dans $H^{r_2-\nu}$, ni dans $C^{r_2-\nu+\varepsilon}$.

Certains termes de R_ν sont hors de cause : ainsi $Op(\sigma) \circ Op(\tau)$ qui envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans L^p_∞ $(1 \leq p \leq \infty)$; de même $Op(\partial_\xi^\alpha \sigma \,.\, D_x^\alpha \tau)$, avec $\alpha < \nu$, qui envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $B^{r_2-\alpha}_{p,\infty} \subset B^{r_2-\nu}_{p,1}$. Il nous reste

$$(\partial_\xi^\nu \sigma \,.\, D_x^\nu \tau)(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{j(\nu-r_2)} \exp(i\,2^j x)(\phi^{(\nu)})^2(\xi) \quad .$$

Aux notations près, on retrouve le premier contre-exemple du théorème 1 ; pour un choix correct de ϕ, $Op(\partial_\xi^\nu \sigma \,.\, D_x^\nu \tau)$ n'envoie $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ ni dans $H^{r_2-\nu}$, ni dans $C^{r_2-\nu+\varepsilon}$.

3°.- Soient ϕ à support dans $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$, égale à 1 sur $[1, \frac{4}{3}]$ et ψ à spectre dans $[0, \frac{1}{3}]$. Posons $\tau(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-jr_2} \exp(i\,2^j x)\hat{\psi}(\xi)$ et $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{jm_1}\phi(2^{-j}\xi)$. On vérifie que le symbole $\sum_{|\alpha|\leq\nu} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha \sigma \,.\, D_x^\alpha \tau$ est nul ; il reste

$$R_\nu(\psi) = \sum_{j\geq 0} 2^{j(m_1-r_2)} \exp(i\,2^j x)(\psi * \psi) \ ,$$

qui n'appartient ni à $H^{r_2-m_1}$ ni à $C^{r_2-m_1+\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

b) On vérifie ensuite que R_ν ne se prolonge pas en un opérateur borné de C^{s_o} (ou de H^{s_o}) dans $\mathcal{D}'$.

1°.- On reprend les fonctions ϕ et ψ du a) 3°. ; posons $\sigma(x,\xi) = \hat{\psi}(\xi)$,

$$\tau(x,\xi) = \sum_{j\geq o} 2^{j(m_2-r_2)} \exp(-i\,2^j x)\phi(2^{-j}\xi) \qquad \text{et}$$

$$f_\mu(x) = \sum_{j=1}^{\mu} 2^{j(r_2-m_2)} \exp(i\,2^j x)\psi(x) \ ;$$

alors (f_μ) est une suite bornée dans $C^{m_2-r_2}$, mais $R_\nu(f_\mu) = \mu(\psi * \psi)$.

2°.- On reprend les fonctions ϕ, ψ et le symbole τ du 1°. On pose

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq o} 2^{jm_1}\phi(2^{-j}\xi)$$

$$f_\mu = \sum_{j=1}^{\mu} 2^{j(r_2-m_1-m_2)} \exp(i\,2^j x)\psi \quad .$$

(f_μ) est bornée dans $C^{m_1+m_2-r_2}$ mais

$$R_\nu(f_\mu) = \mathrm{Op}(\sigma\,\tau)(f_\mu) = \mu\,\psi\,.$$

3°.- Soient ϕ à support dans $[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}]$, telle que $\phi(\xi) = \xi^{\nu+1}$ pour $\xi \in [1, \frac{4}{3}]$; ψ à spectre dans $[0, \frac{1}{6}]$. On pose

$$\tau(x,\xi) = \Big(\sum_{j\geq o} 2^{jm_2}\,\phi^{(\nu+1)}(2^{-j}\xi)\Big)\psi(x)$$

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq o} 2^{j(m_1-r_1)} \exp(-i\,2^j x)\phi(2^{-j}\xi)$$

$$f_\mu(x) = \sum_{j=1}^{\mu} 2^{(r_1+\nu+1-m_1-m_2)j} \exp(i\,2^j x)\psi^{(\nu+1)}(x).$$

(f_μ) est une suite bornée dans $C^{m_1+m_2-r_1-\nu-1}$ et l'on vérifie qu'à une constante multiplicative près

$$R_\nu(f_\mu) = \sum_{j=1}^{\mu} 2^{j(\nu+1)} \exp(-i2^j x)\, \mathcal{L}_j(\psi)[\exp(i2^j x)\psi^{(\nu+1)}] ,$$

où $\mathcal{L}_j(\psi)$ a été défini au C. ; on a

$$\psi(x-t) = \sum_{\alpha=0}^{\nu+1} \frac{\psi^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} (-t)^\alpha + t^{\nu+2}\, g(x,t),$$

où g est une fonction C^∞ bornée ; dès lors $R_\nu(f_\mu)$ est la somme des fonctions suivantes :

$$-\sum_{j=1}^{\mu} 2^{-j} \exp(-i2^j x) \int \check{\phi}(t)\, t^{\nu+2}\, g(x,2^{-j}t) u_j(x-2^{-j}t)dt$$

(où l'on a posé $u_j = \exp(i2^j x)\psi^{(\nu+1)}$) ; ces fonctions forment, quand μ varie, une partie bornée de L^∞.

$$-\sum_{j=1}^{\mu} (-i)^{\nu+1} \psi^{(\nu+1)} \exp(-i2^j x)\phi^{(\nu+1)}(2^{-j}D)(u_j)$$

qui n'est autre que $\mu(-i)^{\nu+1}[\psi^{(\nu+1)}]^2$.

E.- Démonstration esquissée du théorème 3.

a) Symboles à support compact.

D'après le lemme 3, on peut se limiter aux symboles de la forme $\sigma(x,\xi) = \overline{M(x)}\ \overline{\theta(\xi)}$, où $M \in C^r$ et $\theta \in \mathcal{D}$; alors

$$\rho_\nu(f) = \theta(D)(Mf) - \sum_{|\alpha|\leq\nu} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha M \cdot \theta^{(\alpha)}(D)(f) .$$

Si $f \in B^s_{p,q}$ (ou H^s_p) avec $|s| < r$, on a (théorème 1) $Mf \in B^s_{p,q}$ (resp. H^s_p) et $\theta(D)(Mf) \in L^p_\infty$; de même $\theta^{(\alpha)}(D)(f) \in L^p_\infty$ et $D^\alpha M \cdot \theta^{(\alpha)}(D)(f) \in B^{r-|\alpha|}_{p,\infty}$.

b) Symboles élémentaires.

Si $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq o} 2^{jm}\overline{M_j(x)}\ \overline{\phi(2^{-j}\xi)}$, alors $\rho_\nu = \sum_{j\geq o} 2^{jm}\mathcal{L}_j(M_j)$; à partir de là, la démonstration suit le même cours que celle du théorème 2 (voir le C).

c) Contre-exemples.

1°.- Voici un symbole σ tel que ρ_ν n'envoie pas $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $C^{r-\nu+\varepsilon}$ ou $H^{r-\nu}$. On pose $M(x) = \sum_{j\geq o} 2^{-jr}\exp(i2^j x)$ et $\sigma(x,\xi) = \overline{M(x)}\ \theta(\xi)$, où θ est C^∞, réelle, portée par $[0\ ,\ \frac{1}{3}]$. Compte tenu du a), il suffit de montrer que l'O.P.D. de symbole $M^{(\nu)}(x)\ \theta^{(\nu)}(\xi)$ n'envoie pas $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $C^{r-\nu+\varepsilon}$ ou $H^{r-\nu}$; or on a

$$M^{(\nu)}\,.\,\theta^{(\nu)}(D)([\theta^{(\nu)}]^\vee) = \sum_{j\geq o} 2^{j(\nu-r)}\exp(i2^j x)[(\theta^{(\nu)})^2]^\vee \quad .$$

2°.- Soit $\overline{\sigma(x,\xi)} = \sum_{j\geq o} 2^{j(m-r)}\exp(i2^j x)\phi(2^{-j}\xi)$, où ϕ est C^∞, portée par $[\frac{1}{3}\ ,\ 3]$, égale à 1 sur $[1,2]$; si $f\in\mathcal{S}(\mathbf{R})$ a son spectre dans $[0\ ,\ \frac{1}{3}]$, on a

$$\rho_\nu(f) = \sum_{j\geq o} 2^{j(m-r)}\exp(i2^j x)f\ ,$$

ce qui montre que ρ_ν n'envoie pas $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ dans $C^{r-m+\varepsilon}$ (ou H^{r-m}).

3°.- Considérons de nouveau le symbole du 1°. ; testons-le sur les $f_\nu(x) = \sum_{j=o}^{\mu} 2^{jr}\exp(-i2^j x)\check{\theta}(x)$, qui forment une suite bornée dans C^{-r} ; nous allons voir que la suite $\theta(D)(Mf_\mu)$ (et donc aussi $\rho_\nu(f_\mu)$) n'est pas bornée dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. On a $\theta(D)(Mf_\mu) = g_{1,\mu} + g_{2,\mu} + g_{3,\mu}$, où

$$g_{1,\mu}(x) = \sum_{k=o}^{\mu}\{\sum_{j=o}^{k-1} 2^{(k-j)r}\exp(i(2^j - 2^k)x)\check{\theta}(x)\}\ ,$$

$$g_{2,\mu}(x) = \sum_{j\geq o}\{\sum_{k=o}^{\inf(\mu,j-1)} 2^{(k-j)r}\exp(i(2^j - 2^k)x)\check{\theta}(x)\}\ ,$$

$$g_{3,\mu}(x) = (\mu+1)\check{\theta}(x).$$

On vérifie que $(g_{1,\mu})$ et $(g_{2,\mu})$ sont bornées dans C^{-r} et $B^{o}_{\infty,\infty}$ respectivement (voir le second contre-exemple du théorème 1).

4°.- Nous allons voir enfin que ρ_ν n'admet pas d'extension bornée à C^{m-r} (ou H^{m-r}). Posons

$$\overline{\sigma(x,\xi)} = \sum_{j\geq o} 2^{j(m-r)} \exp(-i\,2^j x)\phi(2^{-j}\xi) ,$$

où ϕ est portée par $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, égale à 1 sur $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$; on testera ρ_ν sur la suite

$$f_\mu(x) = \sum_{j=2}^{\mu} 2^{j(r-m)} \exp(i\,2^j x)\psi(x) ,$$

où $\hat{\psi}$ est portée par $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$. $\rho_\nu(f_\mu)$ est la somme des distributions suivantes

$$- \sum_{k=2}^{\mu} 2^{k(r-m)} \{ \sum_{j\geq o} 2^{j(m-r)} \phi(2^{-j}D)[\exp(i(2^k - 2^j)x)\psi]\} = 2^{r-m} \sum_{j=1}^{\mu-1} \exp(i\,2^j x)\psi ,$$

qui forment, quand μ varie, une partie bornée de $B^{o}_{\infty,\infty}$;

$$- \sum_{\alpha=1}^{\nu} \frac{(-1)^{\alpha+1}}{\alpha\,!} \exp(-i\,2^j x)\phi^{(\alpha)}(2^{-j}D)(f_\mu) = 0 \quad ;$$

$$- \quad - \sum_{j\geq o} \exp(-i\,2^j x)2^{j(r-m)}\phi(2^{-j}D)(f_\mu) = (1-\mu)\psi \quad .$$

4.- UNE ALGEBRE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS PEU REGULIERS .

Le souci de produire des estimations optimales conduit vite - on l'a vu au paragraphe précédent - à des énoncés inextricables. Nous allons clarifier notre propos en appliquant les théorèmes 2 et 3 à un problème important et naturel : la construction d'algèbres auto-adjointes d'O.P.D.

Théorème 4.- Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et A_k l'ensemble des opérateurs de la forme $\mathrm{Op}(\sum_{j=o}^{k-1} \sigma_j) + R$, où

(i) $\sigma_j(x,\xi)$ est un symbole d'ordre $-j$ en ξ et de classe C^{2k-j} en x, c'est-à-dire vérifiant les inégalités $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{-|\alpha|-j}$ pour $|\beta| \leq 2k-j$,

(ii) R est régularisant d'ordre k sur $[-k, 0]$; alors A_k est une sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$.

J.D. Alvarez-Alonso et A.P. Calderón [2] sont parvenus à un résultat très voisin ; voici en quoi il diffère du nôtre. Les O.P.D. considérés par ces deux auteurs appartiennent aux classes $S^m_{\rho,\delta}$ à régularité limitée en x ($0 \leq \delta < \rho \leq 1$) ; les estimations L^2 exigent alors beaucoup plus de régularité en x ; plus précisément $\sigma_j(x,\xi)$ doit être de classe C_m, où $m = 2[\frac{n}{2}] + N + k - 2 - j$, et N est l'unique entier tel que $N - 1 < \frac{k}{\rho - \delta} \leq N$, la sommation s'effectuant de $j = 0$ à $j = N-1$.

Voici la preuve du théorème 4. Soient deux opérateurs $\mathrm{Op}(\sum_{j=0}^{k-1} \sigma_j) + R$ et $\mathrm{Op}(\sum_{j=0}^{k-1} \tau_j) + S$ dans la classe A_k. Leur composé s'écrit

$$\sum_{j,\ell=0}^{k-1} \mathrm{Op}(\sigma_j) \circ \mathrm{Op}(\tau_\ell) + \sum_{\ell=0}^{k-1} R \circ \mathrm{Op}(\tau_\ell) + \sum_{j=0}^{k-1} \mathrm{Op}(\sigma_j) \circ S + R \circ S \ .$$

On observe d'abord que les 3 derniers termes de la somme ci-dessus sont régularisants d'ordre k.

Pour $R \circ S$, c'est immédiat.

Pour $\mathrm{Op}(\sigma_j) \circ S$, on observe que $\mathrm{Op}(\sigma_j)$ est borné sur L^2 (Th.1), donc $\mathrm{Op}(\sigma_j) \circ S$ envoie H^{-k} dans L^2 ; l'hypothèse $-2k < k - j < 2k - 2j$ entraîne que $\mathrm{Op}(\sigma_j)$ envoie H^{k-j} dans H^k, ainsi $\mathrm{Op}(\sigma_j) \circ S$ envoie L^2 dans H^k.

Des considérations analogues montrent que $R \circ \mathrm{Op}(\tau_\ell)$ est régularisant d'ordre k.

Dans la somme double $\sum_{j,\ell=0}^{k-1}$ ... nous distinguerons deux sortes de termes :

1°.- Pour $k \leq j + \ell$, $\mathrm{Op}(\sigma_j) \circ \mathrm{Op}(\tau_\ell)$ est régularisant d'ordre k. En effet, $\mathrm{Op}(\tau_\ell)$ envoie L^2 dans H^ℓ et $\mathrm{Op}(\sigma_j)$ envoie H^ℓ dans H^t avec $t = \ell + j$ si $\ell < 2k - 2j$ et $t < 2k - j$ sinon ; dans les deux cas, l'hypothèse $k < 2k - j$ permet de faire $t \geq k$.

Les conditions $-2k < -k < 2k - 2\ell$ et $-2k < \ell - k < 2k - 2j$ montrent que $Op(\tau_\ell)$ envoie H^{-k} dans $H^{\ell-k}$ et $Op(\sigma_j)$ $H^{\ell-k}$ dans $H^{\ell+j-k} \subset L^2$.

2°.- Pour $j+\ell \leq k-1$, on utilise le théorème 2 pour écrire

$$Op(\sigma_j) \circ Op(\tau_\ell) = \sum_{|\alpha| \leq k-1-j-\ell} \frac{1}{\alpha!} Op(\partial_\xi^\alpha \sigma_j \, . \, D_x^\alpha \tau_\ell) + R_{j,\ell} \, .$$

$\partial_\xi^\alpha \sigma_j$ est d'ordre $-j-|\alpha|$ et de classe C^{2k-j}, $D_x^\alpha \tau_\ell$ d'ordre $-\ell$ et de classe $C^{2k-\ell-|\alpha|}$; il en résulte que $\partial_\xi^\alpha \sigma_j \, . \, D_x^\alpha \tau_\ell$ est d'ordre $-j-\ell-|\alpha|$ et de classe $C^{2k-\sup(j,\ell+|\alpha|)}$; ainsi, en ordonnant suivant les ordres décroissants, le terme principal $\sum_{|\alpha| \leq k-1-j-\ell}$ ... peut-il s'écrire $\sum_{j=0}^{k-1} Op(\rho_j)$, où ρ_j est d'ordre $-j$ et de classe C^{2k-j}.

Il reste à établir que $R_{j,\ell}$ est régularisant d'ordre k. En fait, $R_{j,\ell}$ est régularisant d'ordre k sur $]s_0, s_1 - k[$, avec $s_0 = -2k$ et $s_1 = \inf(2k-j, k+j+1)$.

Si $k \leq 2j+1$, on a $s_1 = 2k-j$ et $k < 2k-j$; alors $R_{j,\ell}$ envoie L^2 dans H^k.

Si $k > 2j+1$, on a $s_1 = k+j+1$ et $k < k+j+1$, donc $R_{j,\ell}$ envoie encore L^2 dans H^k.

Les deux conditions $-2k < -k$ et $0 < s_1$ entraînent que $R_{j,\ell}$ envoie H^{-k} dans L^2.

Il faut encore montrer que l'adjoint de $\sum_{j=0}^{k-1} Op(\sigma_j) + R$ appartient à A_k ; pour cela, on l'écrit

$$\sum_{j=0}^{k-1} \{ \sum_{|\alpha| \leq k-1-j} \frac{1}{\alpha!} Op(\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \bar{\sigma}_j) + R_j \} + R^*$$

et l'on applique le théorème 3. C.Q.F.D.

5.- COMMUTATEURS D'O.P.D. A COEFFICIENTS LIPSCHITZIENS.

Nous invitons le lecteur à un retour aux sources.

C'est en effet en 1965 [11] qu'A.P. Calderón démontrait l'un des premiers - et peut-être le plus important historiquement - théorèmes du calcul pseudo-différentiel peu régulier. En voici l'énoncé, du moins en dimension 1 :

Si H est la transformation de Hilbert sur $\mathbb{R}$ et T l'opérateur de multiplication par une fonction lipschitzienne bornée sur $\mathbf{R}$, alors le commutateur $[H,T]$ est un opérateur borné de H_p^{s-1} dans H_p^s pour $s \in [0,1]$ et $p \in]1,+\infty[$.

La généralisation naturelle du théorème de Calderón consiste à remplacer H et T par deux opérateurs classiques d'ordre 0 en ξ et lipschitziens en x ; le résultat que nous avons obtenu, comme cas particulier du théorème 2, s'énonce ainsi :

Théorème 5.- Si les symboles σ et τ appartiennent à $CL^0(\mathbf{R}^n, L_1^\infty)$, l'opérateur $R_o = Op(\sigma) \circ Op(\tau) - Op(\sigma\,\tau)$ est borné de H_p^{s-1} dans H_p^s, pour $s \in]0,1[$ et $p \in]1,+\infty[$.

La comparaison des deux résultats invite à poser les deux questions suivantes : R_o est-il borné de H_p^{-1} dans L^p ? de L^p dans H_p^1 ?

L'étude du cas où $\tau(x,\xi)$ est indépendant de ξ (théorème 6) incitera à croire que les deux questions ont toujours la même réponse. En fait, nous verrons qu'il n'en est rien dans le cas général (propositions 7 et 9) : s'il est trivialement faux que R_o envoie H^{-1} dans L^2, nos tentatives pour exhiber un R_o non borné de L^2 dans H^1 sont restées vaines jusqu'à ce jour.

Théorème 6.- Si $\sigma \in CL^0(\mathbf{R}^n, L_1^\infty)$ et $N \in L_1^\infty(\mathbf{R}^n)$ alors le commutateur $[Op(\sigma),N]$ envoie H_p^{-1} dans L^p et L^p dans H_p^1, pour tout $p \in]1,+\infty[$.

Comme d'habitude, on a noté par la même lettre la fonction N et l'opérateur de multiplication par N. Le théorème 6 apparaît comme un corollaire

du théorème de Coifman et Meyer [16] sur lequel nous reviendrons au paragraphe suivant :

Théorème 7.- Si $\sigma \in CL^1(\mathbb{R}^n, L_1^\infty)$ et $\nabla N \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors le commutateur $[Op(\sigma), N]$ est borné sur L^p, pour tout $p \in]1, +\infty[$.

Voici comment on passe du théorème 7 au théorème 6. Soient $\sigma \in CL^0(\mathbb{R}^n, L_1^\infty)$ et $N \in L_1^\infty(\mathbb{R}^n)$; on va d'abord montrer que $[Op(\sigma), N] \circ \frac{\partial}{\partial x_j}$ est borné sur L^p. On a

$$[Op(\sigma), N] \circ \frac{\partial}{\partial x_j} = [Op(\sigma) \circ \frac{\partial}{\partial x_j}, N] - Op(\sigma) \circ \frac{\partial N}{\partial x_j} .$$

Le théorème 1 et l'hypothèse $\nabla N \in L^\infty$ entraînent que $Op(\sigma) \circ \frac{\partial N}{\partial x_j}$ est borné sur L^p.

L'opérateur $Op(\sigma) \circ \frac{\partial}{\partial x_j}$ a pour symbole $\tau(x,\xi) = -i\,\xi_j \sigma(x,\xi)$; on a donc $\tau \in CL^1(\mathbb{R}^n, L_1^\infty)$ et le théorème 7 dit que $[Op(\tau), N]$ est borné sur L^p.

Etudions maintenant l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_j} \circ [Op(\sigma), N]$; il s'écrit encore

$$[Op(\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}), N] - [Op(\tau), N] - \frac{\partial N}{\partial x_j} \circ Op(\sigma) .$$

Il nous suffira donc de montrer que $[Op(\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}), N]$ est borné sur L^p. Grâce au lemme 2, on peut supposer que $\sigma(x,\xi)$ est de la forme

$$\sum_{k \geq o} M_k(x) \phi(2^{-k}\xi),$$

où (M_k) est bornée dans L_1^∞ et ϕ est C^∞, à support compact ne contenant pas 0 ; dès lors

$$[Op(\frac{\partial \sigma}{\partial x_j}), N] = \sum_{k \geq o} \frac{\partial M_k}{\partial x_j} \circ [\phi(2^{-k}D), N] .$$

Nous venons d'écrire une série normalement convergente dans $\mathcal{L}(L^p, L^p)$; en effet, la norme d'opérateur de $[\phi(2^{-k}D), N]$ est majorée par $C\,2^{-k}$ (voir l'inégalité (7)). C.Q.F.D.

Proposition 7.- On suppose que $\sigma(x,\xi) = \theta(\xi)$, où θ est C^∞ à support compact ; alors

(i) pour tout $\tau \in CL^0(\mathbf{R}^n, L^\infty_1)$, $R_0 = Op(\sigma) \circ Op(\tau) - Op(\sigma\,\tau)$ envoie L^p dans H^1_p $(1 < p < \infty)$;

(ii) il existe $\tau \in CL^0(\mathbf{R}^n, L^\infty_1)$ tel que R_0 ne soit pas borné de H^{-1} dans L^2.

Pour montrer le (i), on considère séparément les opérateurs $Op(\sigma) \circ Op(\tau)$ et $Op(\sigma\,\tau)$.

Par le théorème 1, $Op(\tau)$ envoie L^p dans L^p ; quant à $Op(\sigma)$, c'est un opérateur régularisant d'ordre infini ; donc $Op(\sigma) \circ Op(\tau)$ envoie L^p dans L^p_∞.

$\sigma\,\tau$ est un symbole à support compact en ξ, lipschitzien en x ; par le lemme 3, l'étude de $Op(\sigma\,\tau)$ se ramène à celle de l'opérateur $T(f) = N(\phi \star f)$, où $N \in L^\infty_1$ et $\hat{\phi} \in \mathcal{D}$; N étant un multiplicateur de H^1_p, T envoie L^p dans H^1_p et H^{-1}_p dans L^p.

Nous allons construire $\tau(x,\xi)$ de façon que $Op(\sigma) \circ Op(\tau)$ n'envoie pas H^{-1} dans $\mathcal{D}'$: il en résultera évidemment que R_0 n'envoie pas H^{-1} dans L^2.

On a $\theta(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq A$; choisissons j_0 assez grand pour que $|\xi - 2^j e_1| \leq A$ et $j \geq j_0$ entraîne

$$\frac{3}{4}\,2^j \leq |\xi| \leq \frac{5}{4}\,2^j$$

et posons

$$f_\mu(x) = \sum_{j=j_0}^{\mu} \frac{2^j}{j} \exp(i\,2^j x_1)\check{\theta}(x) \ ;$$

(f_μ) est alors une suite bornée dans H^{-1}.

Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, portée par $\frac{2}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4}{3}$, égale à 1 sur $\frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{5}{4}$, et

$$\tau(x,\xi) = \sum_{j \geq 0} 2^{-j} \exp(-i\,2^j x_1)\phi(2^{-j}\xi) \ ;$$

alors $\tau \in CL^0(\mathbf{R}^n, L^\infty_1)$ et

$$[Op(\sigma) \circ Op(\tau)](f_\mu) = \Big(\sum_{j=j_0}^{\mu} \frac{1}{j}\Big)\ \check{\theta} * \check{\theta} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Proposition 8.- Soient $\sigma,\tau \in CL^0(\mathbb{R}^n, L^\infty_1)$; on suppose de plus qu'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$, la fonction $x \longmapsto \tau(x,\xi)$ ait son spectre dans la boule $|\eta| \le C|\xi|$. Alors R_o est borné de L^p dans H^1_p $(1 < p < +\infty)$.

Remarquons que, pour C assez petit, $Op(\tau)$ est alors un opérateur paradifférentiel au sens de J.M. Bony [8]. Nous reprenons la démonstration du théorème 2, en observant que $N_{k,\ell} = 0$ pour ℓ assez grand par rapport à k, disons $\ell \ge k + \ell_o$. $R_o(f)$ s'écrit comme combinaison linéaire des :

$$g_1 = \sum_j M_j \cdot \mathcal{P}_j\Big(\sum_{\ell<j} N_{j+\lambda,\ell}\Big)(f_{j+\lambda}) \qquad (-2 \le \lambda \le 2),$$

$$g_2 = \sum_j M_j \cdot \phi(2^{-j}D)\Big(\sum_{\ell\ge j+5} N_{\ell+\lambda,\ell}\ f_{\ell+\lambda}\Big) \qquad (-5 \le \lambda \le -1),$$

$$g_3 = \sum_j M_j \cdot N_{j+\lambda,j+\mu}\phi(2^{-j}D)(f_{j+\lambda}) \qquad (-1 \le \lambda \le 1{,}5 \le \mu \le \lambda + \ell_o),$$

$$g_4 = \sum_j M_j \cdot \phi(2^{-j}D)(N_{j+\mu,j+\lambda}\ f_{j+\mu}) \qquad (0 \le \lambda \le 4, \lambda - \ell_o \le \mu \le 3),$$

$$g_5 = \sum_j M_j \cdot N_{j+\mu,j+\lambda}\ \phi(2^{-j}D)(f_{j+\mu}) \qquad (0 \le \lambda \le 4, -1 \le \mu \le 1).$$

L'estimation des g_i repose sur une version améliorée du lemme de presque-orthogonalité :

Lemme 7.- Soit (M_j) une suite bornée dans L^∞_1 et (f_j) une famille de fonctions à spectres respectifs dans la boule $|\xi| < \gamma \cdot 2^j$; alors, pour tout $1 < p < \infty$, on a $\big\|\sum_j M_j f_j\big\|_{H^1_p} \le C \big\|\big(\sum_j 4^j |f_j|^2_2\big)^{1/2}\big\|_p$.

On écrit $M_j = P_j + Q_j$, où $\hat{P}_j$ est portée par $|\xi| \le 2^j$, $\|P_j\|_\infty \le C$, $\|Q_j\|_\infty \le C\,2^{-j}$ et $\|\nabla Q_j\|_\infty \le C$.

Par la proposition 2 (iii), on a

$$\|\sum_j P_j f_j\|_{H^1_p} \le C \|(\sum_j 4^j |f_j|^2_2)^{1/2}\|_p \ .$$

On va voir que la série $\sum_j Q_j f_j$ converge normalement dans H^1_p : pour cela, il suffit que $\sum_j Q_j f_j$ et $\sum_j \nabla(Q_j f_j)$ convergent normalement dans L^p.

Des hypothèses et du lemme de Bernstein, on tire

$$\|\nabla(Q_j f_j\|_p \le C \|f_j\|_p$$

$$\le C\, 2^{-j} \|2^j f_j\|_p$$

$$\le C' 2^{-j} \|(\sum_k 4^k |f_k|^2)^{1/2}\|_p \ ;$$

de même $\|Q_j f_j\|_p \le C\, 2^{-j} \|f_j\|_p$, etc..., ce qui termine la preuve du lemme 7.

En "oubliant" les entiers λ, μ, on trouve successivement :

- $$\|g_1\|_{H^1_p} \le C \|(\sum_j 4^j |\mathcal{S}_j(\sum_{\ell<j} N_{j,\ell})(f_j)|^2)^{1/2}\|_p \le C \|f\|_p \ ,$$

- $$\|g_2\|_{H^1_p} \le C \|(\sum_j 4^j |\phi(2^{-j}D)(\sum_{\ell\ge j+5} N_{\ell,\ell} f_\ell)|^2)^{1/2}\|_p \ ;$$

grâce au théorème des multiplicateurs de Marcinkiewicz (à valeurs dans ℓ^2), on obtient alors

$$\|g_2\|_{H^1_p} \le C \|(\sum_j 4^j |\sum_{\ell\ge j+5} N_{\ell,\ell} f_\ell|^2)^{1/2}\|_p$$

$$\le C' \|(\sum_j 4^j (\sum_{\ell\ge j+5} 2^{-\ell} |f_\ell|)^2)^{1/2}\|_p$$

$$\le C'' \|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p$$

(la dernière inégalité provient du lemme 4).

- $\|g_3\|_{H^1_p} \leq C \|(\sum_j 4^j |N_{j,j}\phi(2^{-j}D)(f_j)|^2)^{1/2}\|_p$

$\leq C' \|(\sum_j |\phi(2^{-j}D)f_j|^2)^{1/2}\|_p$

$\leq C'' \|(\sum_j |f_j|^2)^{1/2}\|_p$

- $\|g_4\|_{H^1_p}$ et $\|g_5\|_{H^1_p}$ s'estiment comme $\|g_3\|_{H^1_p}$. C.Q.F.D.

Proposition 9.- Soient H la transformation de Hilbert sur $\mathbf{R}$ et

$$\tau(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-j}\omega_j \exp(-i\,2^j x)\phi(2^{-j}\xi),$$

où $(\omega_j)_{j\geq 0}$ est une suite positive bornée. Alors

(i) le commutateur $[Op(\tau),H]$ est borné de L^2 dans H^1,

(ii) si $\sum_{j\geq 0} \omega_j^2 = +\infty$, il existe des fonctions ϕ telles que $[Op(\tau),H]$ ne soit pas borné de H^{-1} dans L^2.

On vérifie d'abord que le symbole de $[Op(\tau),H]$ est (à une constante près)

$$\sum_{j\geq 0} 2^{-j+1}\omega_j \exp(-i\,2^j x)(u\phi)(2^{-j}\xi)$$

où u est la fonction caractéristique de $[0,1]$.

L'opérateur $[Op(\tau),H] \circ \frac{d}{dx}$ a pour symbole

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{-j+1}\omega_j\, i\xi \exp(-i\,2^j x)(u\phi)(2^{-j}\xi).$$

Supposons de plus que ϕ a son support dans $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$ et que $\phi(\xi) = (i\xi)^{-1}$ pour $\xi \in [\frac{3}{4}, 1]$.

Par hypothèse sur ω, il existe une suite positive $(\gamma_j)_{j\geq 0}$ telle que

$\sum_{j\geq o} \gamma_j^2 < +\infty$ et $\sum_{j\geq o} \omega_j\gamma_j = +\infty$.

Donnons-nous enfin $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ à spectre dans $[-1,0]$ et

$$f_\nu(x) = \sum_{j=2}^{\nu} \gamma_j \exp(i 2^j x)\psi(x).$$

Les fonctions f_ν forment une partie bornée de L^2 ; par contre,

$$Op(\sigma)(f_\nu) = 2(\sum_{j=2}^{\nu} \omega_j\gamma_j)\psi,$$

dont la norme L^2 tend vers $+\infty$ avec ν ; ainsi, nous avons prouvé (ii).

L'assertion (i) est une conséquence immédiate de la proposition 8. C.Q.F.D.

6.- LE THEOREME DES COMMUTATEURS DE COIFMAN ET MEYER.

Nous allons maintenant prouver le théorème 7.

D'une part, nous simplifierons quelque peu la démonstration originale de Coifman et Meyer, en réduisant au strict minimum les microlocalisations.

D'autre part, il sera clair que la seule régularité Lipschitz, pour le symbole $\sigma(x,\xi)$,est suffisante.

Mais rappelons d'abord l'estimation fondamentale due à ces mêmes auteurs ([15], théorème 33).

Proposition 10.- Soient ϕ et ψ deux fonctions de la classe de Schwartz, à spectres compacts ; on suppose de plus que le spectre de ψ ne contient pas l'origine ; on pose $\phi_j(x) = 2^{nj}\phi(2^j x)$. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$(10) \qquad \sum_{j\geq o} \int |f \star \phi_j|^2 |g \star \psi_j|^2 dx \leq C \|f\|_2^2 \|g\|_{BMO}^2 , \quad \text{et}$$

$$(11) \qquad \| \sum_{j\geq o} (f \star \phi_j)(g \star \psi_j) \|_2 \leq C \|f\|_2 \|g\|_{BMO}.$$

Cela étant, nous démontrerons le théorème 7 pour p = 2. En effet, $[Op(\sigma),N]$ est alors un opérateur de Calderón-Zygmund, comme on le voit en estimant son noyau ; il sera donc automatiquement borné sur L^p $(1 < p < \infty, p \neq 2)$.

Du lemme 2, il résulte qu'on peut prendre $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq o} 2^j M_j(x)\theta(2^{-j}\xi)$, où $\sup_j \|M_j\|_{L_1^\infty} < \infty$ et $\theta \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ est portée par $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$.
$[Op(\sigma),N]$ s'écrit alors

$$(12) \qquad \sum_{j\geq o} 2^j M_j \circ [\theta(2^{-j}D),N] .$$

On peut, sans perdre de généralité, supposer que $\hat{M}_j$ est portée, disons, par $|\xi| \leq \frac{2^j}{6}$. Sinon on écrit $M_j = U_j + V_j$, où U_j a la propriété spectrale souhaitée et $\|V_j\|_\infty \leq C\,2^{-j}$; le terme résiduel $\sum_{j\geq o} 2^j V_j \circ [\theta(2^{-j}D),N]$ est une série normalement convergente dans $\mathcal{L}(L^2,L^2)$. On peut, en outre , dans (12), sommer à partir de j = 3.

On applique (12) à $f = \sum_{j\geq o} f_k$, où f_k est portée par $\Gamma_k(2)$ et $\sum_k \|f_k\|_2^2 \leq C\,\|f\|_2^2$.

L'hypothèse $\nabla N \in L^\infty$ permet d'écrire $N = P_j + Q_j$, où $\|\nabla P_j\|_\infty \leq C$, $\|\nabla Q_j\|_\infty \leq C$, $\|Q_j\|_\infty \leq C\,2^{-j}$ et $\hat{P}_j$ est portée par $|\xi| \leq \frac{2^j}{6}$.

On observe que $[\theta(2^{-j},D),N](f_k)$ est égal à $\theta(2^{-j}D)(Q_j f_k)$ quand $k \leq j-3$ et à $\theta(2^{-j}D)(Q_k f_k)$ quand $k \geq j+3$. Ainsi $[Op(\sigma),N]f$ est la somme des fonctions suivantes :

$$g_1 = \sum_j 2^j M_j \cdot \theta(2^{-j}D)\Big(\sum_{k>j+3} Q_k f_k\Big) ,$$

$$g_2 = \sum_j 2^j M_j \cdot \theta(2^{-j}D)\Big(Q_j \cdot \sum_{k<j-3} f_k\Big) \quad \text{et}$$

$$g_3 = \sum_j 2^j M_j \cdot [\theta(2^{-j}D),N](f_{j+\varepsilon}) \qquad (-2 \leq \varepsilon \leq +2).$$

1°.- Estimation de g_1.

Le terme général en j étant porté par $\Gamma_j(3)$, on a

$$\|g_1\|_2^2 \le C \sum_j 4^j \|M_j\|_\infty^2 \Big(\sum_{k\ge j+3} \|Q_k\|_\infty \|f_k\|_2 \Big)^2$$

$$\le C' \sum_j 4^j \Big(\sum_{k\ge j+3} 2^{-k} \|f_k\|_2 \Big)^2$$

$$\le C'' \sum_k \|f_k\|_2^2$$

(la dernière inégalité provient du lemme 4).

2°.- Estimation de g_2.

Posons $S_j = \sum_{k\le j-3} f_k$; on a

$$\|g_2\|_2^2 \le C \sum_j \|M_j \cdot \theta(2^{-j}D)(Q_j S_j)\|_{H^1}^2$$

$$\le C' \sum_j \|\theta(2^{-j}D)(Q_j S_j)\|_{H^1}^2 \ ,$$

en effet, L_1^∞ est inclus dans l'algèbre des multiplicateurs de H^1 ; dès lors il suffira de montrer que chacune des suites $\|\theta(2^{-j}D)(\nabla Q_j . S_j)\|_2$ et $\|\theta(2^{-j}D)(Q_j . \nabla S_j)\|_2$ a sa norme ℓ^2 majorée par $C\|f\|_2$.

Le lemme de Bernstein donne $\|\nabla f_k\|_2 \le C\, 2^k \|f_k\|_2$, d'où

$$\|\theta(2^{-j}D)(Q_j . \nabla S_j)\|_2 \le C\, 2^{-j} \sum_{k\le j-3} 2^k \|f_k\|_2 \ ,$$

dont la norme ℓ^2 est majorée par $C(\sum_k \|f_k\|_2^2)^{1/2}$, grâce au lemme 4.

L'étude de $\|\theta(2^{-j}D)(\nabla Q_j . S_j)\|_2$ est plus délicate.

On observe que Q_j est la "queue" d'une série de Littlewood-Paley de N ; disons $Q_j = \sum_{k \geq j+\nu} N_k$. Or, pour k - j assez grand, le spectre de $N_k S_j$ ne rencontre pas la couronne $\Gamma_j(2)$; ainsi on peut remplacer Q_j par $N \star \psi_j$, où ψ_j est du type décrit dans la proposition 10 ; de son côté S_j s'écrit évidemment $f \star \phi_j$; on a finalement

$$\|\theta(2^{-j}D)(\nabla Q_j \cdot S_j)\|_2^2 = \|\theta(2^{-j}D)(\nabla N \star \psi_j)(f \star \phi_j)\|_2^2$$

$$\leq C \int |\nabla N \star \psi_j|^2 |f \star \check{\phi}_j|^2 dx$$

et l'on conclut à l'aide de l'inégalité (10).

3°.- Estimation de g_3.

On écrit g_3 comme somme des fonctions

$$g_4 = \sum_j 2^j M_j \cdot [\theta(2^{-j}D), P_j](f_{j+\varepsilon}) ,$$

$$g_5 = \sum_j 2^j M_j \cdot \theta(2^{-j}D)(Q_j f_{j+\varepsilon}) \quad \text{et}$$

$$g_6 = - \sum_j 2^j M_j \cdot Q_j \cdot \theta(2^{-j}D)(f_{j+\varepsilon}) \quad .$$

Pour estimer g_4, on observe que la norme $L^2 \to L^2$ de $[\theta(2^{-j}D), P_j]$ est majorée par $C\, 2^{-j}$; puis que le terme général a son spectre dans $\frac{2^j}{6} < |\xi| \leq 3 \cdot 2^j$. D'où

$$\|g_4\|_2^2 \leq C \sum_j \|f_{j+\varepsilon}\|_2^2 \leq C' \|f\|_2^2 .$$

Le terme général de g_5 a son spectre dans la couronne $\Gamma_j(3)$; on a donc

$$\|g_5\|_2^2 \leq C \sum_j 4^j \|Q_j\|_\infty^2 \|f_{j+\varepsilon}\|_2^2 \leq C' \sum_j \|f_{j+\varepsilon}\|_2^2 \quad .$$

g_6 s'écrit encore $-\sum_j 2^j Q_j \cdot u_j$, où $u_j = M_j \cdot \theta(2^{-j}D)(f_{j+\varepsilon})$ a son spectre dans la couronne $\frac{1}{3}2^j \le |\xi| \le \frac{13}{6}2^j$ et vérifie l'inégalité

$$\sum_j \|u_j\|_2^2 \le C\,\|f\|_2^2 .$$

On commence par retirer à Q_j une queue de la série de Littlewood-Paley $\sum_k N_k$; en effet, pour $k \ge j+\nu$, $N_k u_j$ a son spectre dans une couronne $\Gamma_k(c)$; on a donc

$$\|\sum_j 2^j \Big(\sum_{k\ge j+\nu} N_k\Big) u_j\|_2^2$$

$$= \|\sum_k N_k \Big(\sum_{j\le k-\nu} 2^j u_j\Big)\|_2^2$$

$$\le C \sum_k 4^{-k} \Big(\sum_{j\le k-\nu} 2^j \|u_j\|_2\Big)^2$$

$$\le C' \|f\|_2^2 \qquad \text{(par le lemme 4).}$$

Ainsi on peut, dans l'expression de g_6, remplacer Q_j par $N * \psi_j$. Deux choses restent à faire pour se ramener à l'inégalité (11) :

a) remplacer u_j par $h * \phi_j$, où $\|h\|_2 \le C\,\|f\|_2$,

b) remplacer $2^j N * \psi_j$ par $\nabla N * \psi_j$ au moyen d'une microlocalisation.

Pour réaliser le a), on observe que les $\hat{u}_j$, prises de 3 en 3, ont leurs supports disjoints ; on définit donc, pour $r = 0,1,2$,

$$u_{j,r} = u_j \qquad \text{si} \quad j - r \equiv 0 \pmod 3$$

$$= 0 \qquad \text{sinon,}$$

puis $h_r = \sum_j u_{j,r}$. Si $\hat{\phi} = 1$ sur $\frac{1}{3} \le |\xi| \le \frac{13}{6}$ et $\hat{\phi} = 0$ pour $|\xi| \notin [\frac{1}{4}, 4]$,

on a $\phi_j * h_r = u_{j,r}$.

Voici maintenant l'argument de microlocalisation. Soit $\pi_1 + \ldots + \pi_n = 1$ une partition C^∞ de la sphère unité, subordonnée aux ouverts $|\xi_k| > \frac{1}{2\sqrt{n}}$; on prolonge les π_k à $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ comme fonctions homogènes de degré 0. Alors la fonction

$$(\psi^k)\hat{}(\xi) = \hat{\psi}(\xi)(i\xi_k)^{-1}\pi_k(\xi)$$

est C^∞ et son support est contenu dans celui de $\hat{\psi}$; on a enfin

$$2^{jN} * \psi_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial N}{\partial x_k} * (\psi^k)_j \ ;$$

ainsi s'achève la preuve du théorème 7.

CHAPITRE III : COMMUTATEURS ET MULTIPLICATEURS

1.- ENONCE DU THEOREME PRINCIPAL.

Toute distribution A sur $\mathbb{R}^n$ définit un opérateur de multiplication, encore noté A, qui envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$; d'un autre côté, tout O.P.D. $T \in Op^m_{1,0}$ envoie $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (voir par exemple Taylor [51]) ; ainsi le commutateur [A,T] est-il parfaitement défini comme opérateur de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$.

Soit E un espace de Banach de distributions, contenant $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ comme sous-espace dense. On considère alors la propriété

$\mathcal{P}(A)$: pour tout $T \in Op^1_{1,0}$, le commutateur [A,T] se prolonge en un endomorphisme de E.

Il existe une condition nécessaire très simple pour que $\mathcal{P}(A)$ ait lieu : en l'appliquant en effet à $T = \frac{\partial}{\partial x_j}$, on trouve l'estimation

$$\left\| \frac{\partial A}{\partial x_j} \phi \right\|_E \leq C \|\phi\|_E \qquad (\forall\, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)) ,$$

autrement dit ∇A est un multiplicateur de E. Dans le cas où $E = L^p$ $(1 < p < +\infty)$, la réciproque est vraie : $\mathcal{P}(A)$ équivaut à $\nabla A \in L^\infty$ (théorème de Calderón généralisé par Coifman et Meyer : voir le théorème 7). En fait, le théorème de Calderón s'étend aux espaces de Sobolev :

Théorème 8.- Soient $s \geq 0$ et $1 < p < +\infty$. Pour toute fonction continue A sur $\mathbb{R}^n$, telle que ∇A soit un multiplicateur de H^s_p et tout opérateur pseudo-différentiel T de la classe $Op^1_{1,0}$, le commutateur [A,T] est borné sur H^s_p.

2.- RAPPELS SUR LES MULTIPLICATEURS .

Soit F un autre espace de Banach, inclus topologiquement dans $\mathcal{D}'$; on dit qu'une distribution A est un multiplicateur de E dans F (notation :

$A \in M(E,F)$) s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $\phi \in \mathcal{D}$, $A\phi \in F$ et $\|A\phi\|_F \leq C\|\phi\|_E$. Quand $E = F$, on note $M(E,F) = M(E)$.

Pour une étude systématique de $M(H_p^s)$, on se reportera à l'article de Strichartz [50] ; rappelons notamment l'inclusion $M(H_p^s) \subset M(H_p^t)$, si $s > t \geq 0$; en particulier, on a $M(H_p^s) \subset L^\infty$.

Proposition 11.- Soient $s \geq 0$ et $\sigma = s - [s]$; pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq s$, l'opérateur de dérivation D^α envoie continûment $M(H_p^s)$ dans $M(H_p^{|\alpha|+\sigma}, H_p^\sigma)$.

La preuve se fait par récurrence sur $|\alpha|$. Pour $\alpha = 0$, on applique l'inclusion $M(H_p^s) \subset M(H_p^\sigma)$. Pour $|\alpha| \geq 1$, on écrit

$$A^{(\alpha)}\phi = (A\phi)^{(\alpha)} - \sum_{\gamma<\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} A^{(\gamma)}\phi^{(\alpha-\gamma)} ;$$

de l'inclusion $M(H_p^s) \subset M(H_p^{|\alpha|+\sigma})$, on tire

$$\|(A\phi)^{(\alpha)}\|_{H_p^\sigma} \leq C\|A\phi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}} \leq C'\|A\|_{M(H_p^s)}\|\phi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}} .$$

L'hypothèse de récurrence donne

$$\|A^{(\gamma)}\phi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^\sigma} \leq C\|A\|_{M(H_p^s)}\|\phi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^{|\gamma|+\sigma}} ,$$

mais $\|\phi^{(\alpha-\gamma)}\|_{H_p^{|\gamma|+\sigma}}$ est majorée par $C\|\phi\|_{H_p^{|\alpha|+\sigma}}$.

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration du théorème 8. Il s'agira de se ramener par des arguments essentiellement algébriques au cas $s = 0$. Cette approche est rendue nécessaire par l'absence d'une caractérisation analytique simple des multiplicateurs de H_p^s - du moins pour $s < \frac{n}{p}$. Les inégalités capacitaires mises en évidence par Stegenga [47] et Mazja [36,37] se révèlent peu utilisables, dans la mesure où les capacités de Bessel sont elles-mêmes difficiles à calculer.

3.- PREUVE DU THEOREME 8 : LA REGULARISATION .

Il sera commode, dans un premier temps, de supposer que A est C^∞, à croissance polynômiale, avec toutes ses dérivées bornées. On montrera l'existence de $C > 0$, ne dépendant que de n, s, p et T, tel que, pour un tel A, on ait

$$(1) \qquad \|[A,T]\|_{\mathcal{L}(H_p^s,H_p^s)} \leq C \, \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad .$$

Le cas général s'en déduit par un argument de régularisation standard.

Soit, en effet, $A \in C(\mathbf{R}^n)$ telle que $\nabla A \in M(H_p^s)$ et ϕ une fonction positive C^∞ à support compact, telle que $\|\phi\|_1 = 1$; on pose $\phi_j(x) = j^n \phi(jx)$ $(j \in \mathbf{N})$ et $A_j = A * \phi_j$.

La relation $|A(x)| \leq |A(0)| + \|\nabla A\|_\infty |x|$ montre que $A \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$; ainsi A_j est C^∞ à croissance polynômiale. De plus, pour $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $\alpha_k \neq 0$, on a

$$\partial^\alpha A_j = \frac{\partial A}{\partial x_k} * \partial^{\alpha - e_k} \phi_j$$

ce qui montre que $\partial^\alpha A_j \in L^\infty$.

L'invariance de H_p^s, donc de $M(H_p^s)$, par translation, entraîne

$$\|\nabla A_j\|_{M(H_p^s)} = \|\phi_j * \nabla A\|_{M(H_p^s)} \leq \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad .$$

Soient $f,g \in \mathcal{D}$; il est clair que $[A_j,T]f$ tend vers $[A,T]f$ dans $\mathcal{D}'$ quand $j \to \infty$; ainsi

$$\langle [A,T]f,g \rangle = \lim_{j\to\infty} \langle [A_j,T]f,g \rangle \quad ; \text{ d'où}$$

$$|\langle [A,T]f,g \rangle| \leq C \, \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \, \|f\|_{H_p^s} \, \|g\|_{H_{p'}^{-s}} \quad ,$$

ce qui donne la continuité de $[A,T] : H_p^s \to H_p^s$.

4.- PREUVE DU THEOREME 8 : LE CAS $s \in]0,1[$.

Nous noterons Λ l'opérateur $(I - \Delta)^{1/2}$; l'hypothèse de régularité faite sur A justifie le calcul suivant :

$$\Lambda^s \circ [A,T] = [\Lambda^s,A] \circ T - T \circ [\Lambda^s,A] + [A,[\Lambda^s,T]] + [A,T] \circ \Lambda^s \quad .$$

Appelons S_1, S_2, S_3, S_4 les quatre opérateurs qui apparaissent au second membre ; (1) équivaut alors à

$$(2) \qquad \|S_j\|_{\mathcal{L}(H_p^s,L^p)} \leq C \, \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \qquad (j = 1,2,3,4).$$

Par le théorème 7, $\|[A,T]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$ est majorée par $C \, \|\nabla A\|_\infty$; ce qui donne immédiatement (2) pour $j = 4$. $[\Lambda^s,T]$ est un O.P.D. de la classe $Op^s_{1,0}$ et, a fortiori, dans $Op^1_{1,0}$; de nouveau le théorème 7 donne $\|S_3\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \, \|\nabla A\|_\infty$, inégalité plus forte que (2) pour $j = 3$.

L'estimation de S_1 et S_2 s'avère plus délicate ; elle repose sur l'énoncé suivant, qui sera prouvé au paragraphe 6 :

Proposition 12.- Pour $0 < s < 1$, $1 < p < +\infty$ et $\nabla A \in L^\infty$, le commutateur $[\Lambda^s,A]$ est borné de H_p^{s-1} dans L^p, et sa norme majorée par $C(s,p) \, \|\nabla A\|_\infty$.

La proposition 12 et la continuité de $T : H_p^s \to H_p^{s-1}$ entraînent aussitôt (2) pour $j = 1$.

Puisque T envoie H_p^1 dans L^p, il suffit, pour estimer S_2, de montrer que $\nabla \circ [\Lambda^s,A]$ envoie H_p^s dans L^p ; or cet opérateur s'écrit encore

$$\Lambda^s \circ \nabla A - \nabla A \circ \Lambda^s + [\Lambda^s,\Lambda] \circ \nabla \quad .$$

Pour estimer le premier terme, on utilise $\nabla A \in M(H_p^s)$ - c'est d'ailleurs la seule fois que l'on s'en sert, $\nabla A \in M(L^p)$ suffisant partout ailleurs ! Il est immédiat que $\nabla A \circ \Lambda^s$ envoie H_p^s dans L^p ; enfin le troisième terme relève de la proposition 12.

5.- PREUVE DU THEOREME 8 : LE CAS $s \geq 1$.

Posons $s = m + t$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq t < 1$; (1) équivaut alors à

$$(3) \qquad \| \partial^\alpha \circ [A,T] \|_{\mathcal{L}(H_p^s, H_p^t)} \leq C \| \nabla A \|_{M(H_p^s)} ,$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq m$.

La règle de Leibniz donne aussitôt

$$\partial^\alpha \circ [A,T] = [A, \partial^\alpha \circ T] + \sum_{0<\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} A^{(\beta)} \circ \partial^{\alpha-\beta} \circ T .$$

Le fait que $\partial^{\alpha-\beta} \circ T \in Op_{1,0}^{1+|\alpha|-|\beta|}$ et la proposition 11 entraînent

$$\| A^{(\beta)} \circ \partial^{\alpha-\beta} \circ T \|_{\mathcal{L}(H_p^{t+|\alpha|}, H_p^t)} \leq C \| \nabla A \|_{M(H_p^s)} ,$$

quel que soit $\beta \in \mathbb{N}^n$, $0 < \beta \leq \alpha$.

$\partial^\alpha \circ T$ s'écrit

$$\sum_{0\leq\gamma\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} T_\gamma \circ \partial^{\alpha-\gamma} ,$$

où T_γ est l'O.P.D. de symbole $\partial_x^\gamma \sigma(x,\xi)$; on a encore $T_\gamma \in Op_{1,0}^1$ et $0 \leq |\alpha - \gamma| \leq m$: on peut donc, sans perdre de généralité, remplacer $\partial^\alpha \circ T$ par $T \circ \partial^\alpha$.

Le commutateur $[A, T \circ \partial^\alpha]$ s'écrit encore

$$[A,T] \circ \partial^\alpha - \sum_{0\leq\beta<\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} T \circ A^{(\alpha-\beta)} \circ \partial^\beta ;$$

les résultats du paragraphe 4 donnent

$$\| [A,T] \circ \partial^\alpha \|_{\mathcal{L}(H_p^s, H_p^t)} \leq C \| \nabla A \|_{M(H_p^t)} .$$

Compte tenu de la continuité de $T : H_p^{t+1} \to H_p^t$, il nous faut enfin montrer, pour $\beta < \alpha$,

(4) $$\|A^{(\alpha-\beta)}\|_{\mathcal{L}(H_p^{s-|\beta|},H_p^{t+1})} \leq C \|\nabla A\|_{M(H_p^s)} \quad ;$$

or le premier membre de (4) est équivalent à la somme des normes, dans l'espace $\mathcal{L}(H_p^{s-|\beta|},H_p^t)$, des opérateurs $A^{(\alpha-\beta)}$, $\nabla A^{(\alpha-\beta)}$ et $A^{(\alpha-\beta)} \circ \nabla$; à chacune de ces normes s'applique de nouveau la proposition 11. C.Q.F.D.

6.- PREUVE DE LA PROPOSITION 12 : L'INTERPOLATION COMPLEXE.

Pour prouver la proposition 12, on utilise l'interpolation complexe des opérateurs $[\Lambda^z,A] : H_p^{\mathrm{Re}\, z-1} \to L^p$. Si $z = 1+iy$, Λ^z est en effet un O.P.D. d'ordre 1 et l'on tombe sur le théorème 7 ; si $z = iy$, on doit vérifier que $[\Lambda^z,A] \circ \nabla$ envoie L^p dans L^p ; or cet opérateur s'écrit

$$[\Lambda^z \circ \nabla, A] - \Lambda^z \circ \nabla A \quad ;$$

le premier terme relève de nouveau du théorème 7 et le second est borné sur L^p, grâce au théorème des multiplicateurs de Marcinkiewicz.

Pour se placer dans les hypothèses précises du théorème de Calderón-Lions (voir [45], théorème IX.20), il faut toutefois

1) contrôler la croissance en Im z des opérateurs en question,

2) tronquer le symbole de Λ^z ,

toutes choses que nous ferons maintenant en détail.

Soit donc $\phi \in \mathcal{D}$ une fonction égale à 1 au voisinage de 0 et, pour $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\sigma_{\varepsilon,z}(\xi) = (1+z)^{-N}(1+|\xi|^2)^{z/2}\phi(\varepsilon\,\xi),$$

où N est un grand entier, à notre disposition. On note $T_\varepsilon(z)$ le commutateur $[A,\sigma_{\varepsilon,z}(D)]$; on va vérifier les propriétés :

(5) T_ε est une fonction analytique, bornée, continue sur la bande

$0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$, à valeurs dans $\mathcal{L}(H_p^{-1}, L^p)$;

(6) Il existe $C > 0$ tel que, quels que soient $\varepsilon \in]0,1]$ et $y \in \mathbf{R}$, on ait

$$\|T_\varepsilon(iy)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} \leq C \|\nabla A\|_\infty \qquad \text{et}$$

$$\|T_\varepsilon(1+iy)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \|\nabla A\|_\infty \ ;$$

par interpolation complexe, il existe alors $C' > 0$ tel que, pour tout $\varepsilon \in]0,1]$ et $0 < s < 1$, on ait

$$(7) \qquad \|T_\varepsilon(s)\|_{\mathcal{L}(H_p^{s-1},L^p)} \leq C' \|\nabla A\|_\infty \ .$$

Voyons d'abord comment (7) entraîne la proposition 12.

Si $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, il est élémentaire que, dans l'espace $\mathcal{S}$, on ait $\lim_{\varepsilon\to 0} \sigma_{\varepsilon,s}(D)g = (1+s)^{-N}\Lambda^s g$; on a donc, pour $f \in \mathcal{S}$,

$$\begin{aligned} \langle [A,\Lambda^s]f,g\rangle &= \langle A,(\Lambda^s f)g\rangle - \langle Af,\overline{\Lambda^s \bar{g}}\rangle \\ &= (1+s)^N \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\langle A,(\sigma_{\varepsilon,s}(D)f)\,.\,g\rangle - \langle Af,\overline{\sigma_{\varepsilon,s}(D)\bar{g}}\rangle \right) \\ &= (1+s)^N \lim_{\varepsilon\to 0} \langle T_\varepsilon(s)f,g\rangle \ ; \end{aligned}$$

de (7) on tire alors

$$|\langle [A,\Lambda^s]f,g\rangle| \leq (1+s)^N C' \|f\|_{H_p^{s-1}} \|g\|_{p'} \|\nabla A\|_\infty \ ,$$

d'où la continuité de $[A,\Lambda^s] : H_p^{s-1} \to L^p$.

Avant d'aborder la preuve de (5) et (6) rappelons que la condition (5) est purement "qualitative" - en particulier les constantes y dépendront très normalement de ε ; au contraire c'est l'uniformité en ε qui est le point essentiel de (6).

On commence par montrer

(8) $$\sup_{o\le \mathrm{Re}\, z \le 1} \|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} < +\infty \quad ;$$

pour cela on écrit

$$\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)} \le C(\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|T_\varepsilon(z) \circ \nabla\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)})$$

puis

$$(T_\varepsilon(z)f)(x) = \int (A(x) - A(y))\, \theta_{\varepsilon,z}(x-y) f(y)dy \ ,$$

où $\hat{\theta}_{\varepsilon,z}(\xi) = \sigma_{\varepsilon,z}(\xi)$; ainsi $\|T_\varepsilon(z)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$ est majorée par

(9) $$C \|\nabla A\|_\infty \int |x|\ |\theta_{\varepsilon,z}(x)|dx \ .$$

Pour estimer (9), on appelle M le premier entier supérieur à $\frac{n+1}{2}$; alors

$$(1+|x|^2)^M |\theta_{\varepsilon,z}(x)| = |(2\pi)^{-n} \int e^{ix.\xi} (I-\Delta)^M \sigma_{\varepsilon,z}(\xi)d\xi|$$

$$\le C_n \varepsilon^{-n} \sup_{\substack{|\xi|\le\varepsilon^{-1} \\ |\alpha|\le 2M}} |\sigma^{(\alpha)}_{\varepsilon,z}(\xi)|$$

$$\le C'_n \varepsilon^{-n} |1+z|^{-N} \sup_{\substack{|\xi|\le\varepsilon^{-1} \\ |\alpha|\le 2M}} |\partial^\alpha_\xi (1+|\xi|^2)^{z/2}|$$

$\partial^\alpha_\xi (1+|\xi|^2)^{z/2}$ est de la forme $P_\alpha(\xi,z)(1+|\xi|^2)^{z/2-|\alpha|}$, où P_α est un polynôme de degré $|\alpha|$ en ξ et en z ; on a donc

$$\sup_{\substack{|\xi|\le\varepsilon^{-1} \\ |\alpha|\le 2M}} |\partial^\alpha_\xi (1+|\xi|^2)^{z/2}| \cdot (1+|z|)^{2M} C(n,\varepsilon) \ .$$

Sur la bande $0 \le \mathrm{Re}\, z \le 1$, on a $|1+z| \sim 1+|z|$; dès lors, en imposant $N \ge 2M$, (9) est majoré par $C(n,\varepsilon) \|\nabla A\|_\infty$.

Pour estimer $\|T_\varepsilon(z) \circ \nabla\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}$, on écrit

$$(T_\varepsilon(z) \circ \frac{\partial}{\partial x_k})(f)(x) =$$

$$\int (A(x) - A(y)) \frac{\partial \theta_{\varepsilon,z}}{\partial x_k} (x-y) f(y)dy + \int \theta_{\varepsilon,z}(x-y) \frac{\partial A}{\partial y_k}(y) f(y)dy \ ;$$

la norme $L^p \to L^p$ de $T_\varepsilon(z) \circ \frac{\partial}{\partial x_k}$ est donc majorée par

$$(10) \qquad C \|\nabla A\|_\infty \int (|\theta_{\varepsilon,z}(x)| + |x| \ |\frac{\partial \theta_{\varepsilon,z}}{\partial x_k}(x)|) \, dx \ ;$$

(10) se majore exactement comme (9) ; ainsi s'achève la preuve de (8).

Pour montrer que T_ε est analytique sur la bande $0 < \mathrm{Re}\, z < 1$, il suffit de montrer la même propriété pour $z \mapsto (1+z)^N T_\varepsilon(z)$.

On pose $\hat{\psi}_{\varepsilon,z}(\xi) = (1+z)^N \sigma_{\varepsilon,z}(\xi)$ et

$$S_\varepsilon(z)f(x) = \int (A(x) - A(y)) \frac{\partial \psi_{\varepsilon,z}}{\partial z} (x-y) f(y)dy \ ;$$

il s'agit de montrer que $\frac{\partial}{\partial z}((1+z)^N T_\varepsilon(z)) = S_\varepsilon(z)$.

$$\left\| \frac{(1+z)^N T_\varepsilon(z) - (1+z_0)^N T_\varepsilon(z_0)}{z - z_0} - S_\varepsilon(z_0) \right\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)}$$

est majoré par $C \|\nabla A\|_\infty$ que multiplie

$$\int \left| \frac{\psi_{\varepsilon,z}(x) - \psi_{\varepsilon,z_0}(x)}{z - z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{\varepsilon,z}(x))\Big|_{z=z_0} \right| (1 + |x|)dx$$

$$+ \int \left| \frac{\nabla\psi_{\varepsilon,z}(x) - \nabla\psi_{\varepsilon,z_0}(x)}{z - z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\nabla \psi_{\varepsilon,z}(x))\Big|_{z=z_0} \right| |x| dx \ .$$

Nous allons voir que la première intégrale tend vers 0 quand $z \to z_0$ (il en sera évidemment de même pour la seconde). On la majore par

$$C(n) \sup_{x \in \mathbb{R}^n} (1+|x|^2)^M \left| \frac{\psi_{\varepsilon,z}(x) - \psi_{\varepsilon,z_0}(x)}{z - z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(\psi_{\varepsilon,z}(x)) \Big|_{z=z_0} \right|$$

$$\leq C(n,\varepsilon) \sup_{\substack{|\alpha|\leq 2M \\ |\xi|\leq \varepsilon^{-1}}} \left| \partial_\xi^\alpha \left[\frac{(1+|\xi|^2)^{z/2} - (1+|\xi|^2)^{z_0/2}}{z - z_0} - \frac{\partial}{\partial z}(1+|\xi|^2)^{z/2} \Big|_{z=z_0} \right] \right| ;$$

que cette dernière expression tende vers 0 avec $|z - z_0|$ relève du calcul différentiel élémentaire. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la continuité de T_ε au bord de la bande $0 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1$, achevant ainsi de prouver la condition (5).

Pour prouver les inégalités (6), nous aurons besoin de la formulation quantitative du théorème 7 :

Il existe une constante $C(n,p)$ et un entier P tels que, pour toute fonction lipschitzienne A et tout symbole $\sigma(\xi)$ de la classe $S^1_{1,0}$, on ait

$$(11) \qquad \|[A, Op(\sigma)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \|\nabla A\|_\infty \sup_{\substack{|\alpha|\leq P \\ \xi \in \mathbb{R}^n}} (1+|\xi|)^{|\alpha|-1} |\sigma^{(\alpha)}(\xi)|.$$

Dès lors l'inégalité $\|T_\varepsilon(1+iy)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \|\nabla A\|_\infty$ sera la conséquence de (11) et de :

Il existe $C > 0$ tel que, pour tous $|\alpha| \leq P$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \in]0,1]$ et $y \in \mathbb{R}$, on ait

$$(12) \qquad |\sigma^{(\alpha)}_{\varepsilon,1+iy}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{1-|\alpha|} .$$

Pour prouver (12), on écrit $\sigma^{(\alpha)}_{\varepsilon,1+iy}(\xi)$ sous la forme

$$(2+iy)^{-N} \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} P_\beta(\xi, 1+iy)(1+|\xi|^2)^{\frac{1+iy}{2}-|\beta|} \varepsilon^{|\gamma|} \phi^{(\gamma)}(\varepsilon\xi) ,$$

dont la valeur absolue est majorée par

$$C(n,N,\alpha)(1+|y|)^{|\alpha|-N}(1+|\xi|^2)^{\frac{1-|\alpha|}{2}} ;$$

il reste à choisir $N \geq P$ pour obtenir une majoration uniforme. L'estimation de $\|T_\varepsilon(iy)\|_{\mathcal{L}(H_p^{-1},L^p)}$ relève des mêmes techniques ; cette norme est en effet majorée par

$$\|[A,\sigma_{\varepsilon,iy}(D)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|[A,\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\circ\nabla]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} + \|\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\circ\nabla A\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)}.$$

De la même façon que (12), on montre

$$|\sigma^{(\alpha)}_{\varepsilon,iy}(\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|}, \tag{13}$$

(pour $|\alpha| \leq P$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}$, $\varepsilon \in]0,1]$) ;

(13) et (11) entraînent alors

$$\|[A,\sigma_{\varepsilon,iy}(D)]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty .$$

(13) entraîne aussi la continuité L^p des O.P.D. $\sigma_{\varepsilon,iy}(D)$ avec l'estimation $\|\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C$, d'où

$$\|\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\circ\nabla A\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty .$$

Enfin, le symbole de $\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\circ\frac{\partial}{\partial x_k}$ est $i\xi_k\sigma_{\varepsilon,iy}(\xi)$ et (13) entraîne

$$|\partial^\alpha_\xi(i\xi_k\sigma_{\varepsilon,iy}(\xi))| \leq C(1+|\xi|)^{1-|\alpha|} ;$$

on applique de nouveau (11) pour obtenir

$$\|[A,\sigma_{\varepsilon,iy}(D)\circ\nabla]\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C\,\|\nabla A\|_\infty .$$

7.- UNE VARIANTE DU THEOREME 8.

On peut se demander - dans l'esprit des théorèmes de R. Beals [5] - si la classe $Op^1_{1,0}$ est caractérisée par les propriétés de commutation mise en évidence au théorème 8. Pour être précis, considérons l'ensemble $\mathcal{A}$ des opérateurs linéaires continus $T : \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n) \to \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ tels que

(14) T envoie $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{E}(\mathbf{R}^n)$;

(15) pour tout $s \in \mathbf{R}$, T se prolonge en un opérateur borné de H^{s+1}_p dans H^s_p ;

(16) pour tout $s \geq 0$ et tout $A \in C(\mathbf{R}^n)$ telle que $\nabla A \in M(H^s_p)$, $[A,T]$ se prolonge en un opérateur borné sur H^s_p.

Est-il exact que $\mathcal{A}$ coïncide avec $Op^1_{1,0}$? la réponse est négative. Soit, en effet, l'ensemble $\mathcal{B}$ des opérateurs de convolution dont le symbole $\sigma(\xi)$ est homogène de degré 1 et C^∞ sur la sphère unité (c'est la classe étudiée par Stein [48] au chapitre III, 3.5).

Il est immédiat que $T \in \mathcal{B}$ envoie $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{E}$ et, par dualité, $\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{D}'$.

Pour montrer que T vérifie (15), il suffit d'établir que $\Lambda^s \circ T \circ \Lambda^{-s-1}$ est un opérateur borné sur L^p ; or cet opérateur a pour symbole $m(\xi) = |\xi|(1+|\xi|^2)^{-1/2}Y(\xi)$, où $Y \in C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \{0\})$ est homogène de degré 0 ; il est clair que $|m^{(\alpha)}(\xi)| \leq C_\alpha |\xi|^{-|\alpha|}$ $(\alpha \in \mathbf{N}^n)$: on peut donc appliquer le théorème des multiplicateurs de Marcinkiewicz (voir Stein [48], chapitre IV, 3.2).

Rappelons enfin l'une des versions du théorème des commutateurs :

(17) Si $T \in \mathcal{B}$ et $\nabla A \in L^\infty$, le commutateur $[A,T]$ est borné sur L^p $(1 < p < \infty)$.

L'énoncé (17) est bien connu ; dans l'ignorance d'une référence précise, j'indique toutefois une démonstration succincte.

En développant $\sigma(\xi)$ en harmoniques sphériques, on se ramène au cas où $\sigma(\xi) = |\xi|^{1-k} P_k(\xi)$, avec P_k polynôme homogène harmonique de degré k, normalisé par $\|P_k\|_{L^2(S^{n-1})} = 1$: il nous suffira d'établir que la norme $L^p \to L^p$ de $[A,\sigma(D)]$ est à croissance polynômiale en k. Le noyau de $\sigma(D)$ s'écrit

$$h_k(x) = \alpha_k |x|^{-k-n-1} P_k(x) ,$$

où α_k est à croissance polynômiale.

Pour estimer $[A,\sigma(D)]$, on peut utiliser le théorème "historique" de Calderón ([11], théorème 2).

Si k est pair, il en est de même pour h_k ; alors la norme $L^p \to L^p$ de $[A,\sigma(D)]$ est majorée par $C \|\nabla A\|_\infty \int_{S^{n-1}} |h_k| d\sigma$ ($d\sigma$ = mesure canonique de S^{n-1}) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne immédiatement

$$\int_{S^{n-1}} |h_k| d\sigma \leq \mathrm{vol}(S^{n-1})^{1/2} \alpha_k .$$

Si k est impair et différent de 1, P_k est orthogonal aux harmoniques sphériques de degré 1, dans $L^2(S^{n-1})$; on a donc $\int_{S^{n-1}} P_k(x)\, x_j\, d\sigma = 0$ pour $j = 1,\ldots,n$ et la norme $L^p \to L^p$ de $[A,\sigma(D)]$ est majorée par $C \|\nabla A\|_\infty \int_{S^{n-1}} |h_k|(1+\mathrm{Log}^+|h_k|) d\sigma$; Cauchy-Schwarz donne encore

$$\int_{S^{n-1}} |h_k|(1+\mathrm{Log}^+|h_k|) d\sigma$$

$$\leq \|h_k\|_{L^2(S^{n-1})} \mathrm{vol}(S^{n-1})^{\frac{1}{2}} + \|h_k\|^2_{L^2(S^{n-1})} \leq C(n)(\alpha_k + \alpha_k^2) .$$

Enfin, si k =1, on a $\sigma(\xi) = c\,\xi_j$ pour un $j \in \{1,\ldots,n\}$ et le commutateur $[A,\sigma(D)]$ n'est autre que l'opérateur de multiplication par $-ic\,\frac{\partial A}{\partial x_j}$, pour lequel l'estimation L^p est triviale.

Je dis que les propriétés (15) et (17) suffisent pour obtenir (16).

Dans le cas $s \in]0,1[$, le calcul d'opérateurs du paragraphe 4 est encore valable.

Les opérateurs S_1 et S_2 s'estiment à l'aide de (15) et de la proposition 12 ; S_4 relève de la propriété (17) ; quant à S_3 il est nul, puisque le symbole de T est ici indépendant de x.

Pour $s \geq 1$, on reprend mot pour mot le paragraphe 5, en notant que cette fois on a $\partial^\alpha \circ T = T \circ \partial^\alpha$.

8.- LE CAS DES ESPACES DE BESOV .

Théorème 9.- Soient $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $1 < p < +\infty$ et $q \in [1,+\infty]$. Pour toute fonction continue A sur $\mathbb{R}^n$, telle que $\nabla A \in M(B^s_{p,q})$, et tout O.P.D. $T \in Op^1_{1,0}$, $[A,T]$ est un opérateur borné sur $B^s_{p,q}$.

La réduction au cas $s \in]0,1[$ se fait exactement comme au paragraphe 5 : il suffit en effet de transposer la proposition 11 aux espaces de Besov , et pour cela, il nous suffit de disposer de la relation

$$(18) \qquad M(B^s_{p,q}) \subset M(B^t_{p,q}) \subset L^\infty \quad \text{pour } 0 < t < s.$$

Voici la preuve de (18).

Si $A \in M(B^s_{p,q})$, on a, par dualité, $A \in M(B^{-s}_{p',q'})$; mais $L^2 = B^0_{2,2}$ est l'espace d'interpolation réelle $[B^{-s}_{p',q'}, B^s_{p,q}]_{\frac{1}{2},2}$ ([6], théorème 6.4.5) ; autrement dit, $A \in M(L^2) = L^\infty$; pour conclure, il nous suffit de montrer que $B^t_{p,q}$ est un espace d'interpolation entre L^p et $B^s_{p,q}$; cette propriété est tout à fait naturelle, mais nous ne connaissons pas de référence dans la littérature ; en voici donc la preuve, sur une idée de Y. Meyer.

Lemme 8.- Soit $0 < t < s$ et $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$; alors une condition nécessaire et suffisante pour que $f \in B^t_{p,q}$ est qu'il existe une suite $(f_k)_{k \geq 0}$

<u>d'éléments de</u> $B^s_{p,q}$ <u>telle que</u> $f = \sum_{k\geq o} f_k$ <u>et</u>

$$\|f_k\|_p \leq \omega_k\, 2^{-tk} \tag{19}$$

$$\|f_k\|_{B^s_{p,q}} \leq \omega_k\, 2^{(s-t)k}\ , \tag{20}$$

<u>où</u> $(\omega_k) \in \ell^q$.

Le lemme 8 entraîne immédiatement la propriété d'interpolation : tout opérateur borné sur L^p, qui envoie $B^s_{p,q}$ dans lui-même, envoie également $B^t_{p,q}$ dans $B^t_{p,q}$. Passons à la démonstration.

Que la condition soit nécessaire résulte immédiatement de la proposition 2. Supposons maintenant que $f = \sum_{k\geq o} f_k$, où f_k vérifie (19) et (20). On écrit alors

$$\|f\|_{B^t_{p,q}} \leq C\, \|(2^{jt}\, \|\Delta_j(\sum_{k\geq o} f_k)\|_p)_{j\geq o}\|_{\ell^q}\ ,$$

puis on décompose $\Delta_j(\sum_{k\geq o} f_k) = \Delta_j(\sum_{k=o}^{j} f_k) + \Delta_j(\sum_{k\geq j+1} f_k)$. On a

$$\|(2^{jt}\, \|\Delta_j(\sum_{k=j+1}^{\infty} f_k)\|_p)_{j\geq o}\|_{\ell^q}$$

$$\leq \|(2^{jt}(\sum_{k=j+1}^{\infty} \|f_k\|_p))_{j\geq o}\|_{\ell^q}$$

$$\leq \|(2^{jt}(\sum_{k=j+1}^{\infty} \omega_k\, 2^{-tk}))_{j\geq o}\|_{\ell^q} \qquad \text{(grâce à 19)}$$

$$\leq C\, \|(\omega_k)_{k\geq o}\|_{\ell^q}\ .$$

(la dernière inégalité est une conséquence du lemme 4).

Pour évaluer la norme ℓ^q de $(2^{jt}\, \|\Delta_j(\sum_{k=o}^{j} f_k)\|_p)_{j\geq o}$ on somme contre $(\varepsilon_j)_{j\geq o}$, suite à support fini, normalisée dans $\ell^{q'}$. On obtient

$$\sum_j 2^{jt} \|\Delta_j(\sum_{k=0}^{j} f_k)\|_p \varepsilon_j$$

$$\leq \sum_k \sum_{j=k}^{\infty} 2^{jt} \|\Delta_j f_k\|_p \varepsilon_j$$

$$= \sum_k \{\sum_{j=k}^{\infty} 2^{js} \|\Delta_j f_k\|_p 2^{j(t-s)} \varepsilon_j\} \quad \text{qu'on majore par}$$

(21) $$\sum_k \omega_k 2^{(s-t)k} \|(2^{j(t-s)} \varepsilon_j)_{j\geq k}\|_{\ell^{q'}} \qquad \text{(grâce à 20))}.$$

Pour $q = 1$, on a $\|(2^{j(t-s)} \varepsilon_j)_{j\geq k}\|_{\ell^\infty} \leq 2^{k(t-s)}$; (21) est alors majorée par $\sum_{k\geq 0} \omega_k$.

Pour $q > 1$, (21) est majorée par

$$\|(\omega_k)_{k\geq 0}\|_{\ell^q} [\sum_k 2^{(s-t)kq'} (\sum_{j=k}^{\infty} 2^{j(t-s)q'} \varepsilon_j^{q'})]^{\frac{1}{q'}}$$

$$\leq C \|(\omega_k)_{k\geq 0}\|_{\ell^q} \qquad \text{(de nouveau par le lemme 4). C.Q.F.D.}$$

Il nous reste à prouver le théorème 9 quand $s \in]0,1[$.

Soient $(\Delta_j)_{j\geq 0}$ les opérateurs de convolution définis par le lemme 1 (avec $a = b^{-1} = c = 2$, comme d'habitude). Exactement comme au paragraphe 4, on écrit $\Delta_j \circ [A,T]$ sous la forme

(22) $$[\Delta_j,A] \circ T - T \circ [\Delta_j,A] + [A,[\Delta_j,T]] + [A,T] \circ \Delta_j.$$

Appelons $S_{j,k}$ $(k = 1,2,3,4)$ les quatre termes de (22) ; la continuité de $[A,T]$ sur $B^s_{p,q}$ résultera des quatre inégalités suivantes :

$$(22+k) \qquad \|(2^{sj} \|S_{j,k} f\|_p)_{j\geq 0}\|_{\ell^q} \leq C \|\nabla A\|_{M(B^s_{p,q})} \|f\|_{B^s_{p,q}} .$$

L'inégalité (26) résulte immédiatement de (18), de la continuité de $[A,T]$ sur L^p (théorème 7) et de la proposition 2.

Pour estimer $S_{j,3}$, on observe que les symboles des opérateurs $2^j\Delta_j$ forment une partie bornée de $S^1_{1,0}$, quand j varie dans $\mathbb{N}$; il en est de même pour les symboles des opérateurs $2^j[\Delta_j,T]$; on a donc

$$\|S_{j,3}\|_{\mathcal{L}(L^p,L^p)} \leq C \|\nabla A\|_\infty 2^{-j}$$

et, a fortiori, (25).

Il serait tentant, s'inspirant de la proposition 12, d'estimer $[\Delta_j,A]$ par interpolation réelle ; malheureusement, on obtient seulement

$$\|[\Delta_j,A]\|_{\mathcal{L}(B^{s-1}_{p,q},L^p)} \leq C\, 2^{-js} \|\nabla A\|_\infty \quad ,$$

qui ne donne (23) que pour $q = +\infty$; aussi procéderons-nous à une estimation directe de $[\Delta_j,A]f$, pour $f \in B^{s-1}_{p,q}$.

L'hypothèse $\nabla A \in L^\infty$ permet d'écrire $A = P_j + Q_j$, où $\hat{P}_j$ est portée par la boule $|\xi| \leq \frac{2^j}{6}$ et

$$\|Q_j\|_\infty \leq C\, 2^{-j} \|\nabla A\|_\infty \ ;$$

alors, comme on l'a déjà observé au chapitre II, paragraphe 6, $[\Delta_j,A]f$ est égal à

$$(27) \qquad \Delta_j(Q_j \cdot \sum_{k=0}^{j-4} \Delta_k f) + \Delta_j(\sum_{k=j+4}^{\infty} Q_k \cdot \Delta_k f) + \sum_{\nu=-3}^{+3} [\Delta_j,A](\Delta_{j+\nu} f) \quad .$$

Appelons $u_{j,\ell}$ ($\ell = 1,2,3$) les trois termes de (27) ; (23) sera la conséquence des trois inégalités

$$(27+\ell) \qquad \|(2^{sj} \|u_{j,\ell}\|_p)_{j\geq 0}\|_{\ell^q} \leq C \|\nabla A\|_\infty \|f\|_{B^{s-1}_{p,q}} \quad .$$

On a

$$\|u_{j,1}\|_p \leq C \|\nabla A\|_\infty 2^{-j} \sum_{k=0}^{j-4} \|\Delta_k f\|_p \ ;$$

l'hypothèse $s < 1$ et le lemme 4 donnent alors (28). De même

$$\| u_{j,2} \|_p \leq C \| \nabla A \|_\infty \sum_{k=j+4}^{\infty} 2^{-k} \| \Delta_k f \|_p$$

et c'est l'hypothèse $s > 0$ qui entraîne (29).

Enfin, d'après l'inégalité (7) du chapitre II, la norme $L^p \to L^p$ de $[\Delta_j, A]$ est majorée par $C\, 2^{-j} \| \nabla A \|_\infty$; on a donc

$$\| u_{j,3} \|_p \leq C\, 2^{-j} \| \nabla A \|_\infty \sum_{\nu=-3}^{+3} \| \Delta_{j+\nu} f \|_p \quad ,$$

qui donne immédiatement (30).

Comme au paragraphe 4, la relation (24) se déduit de (23) et de la relation de commutation

$$\nabla \circ [\Delta_j, A] = \Delta_j \circ \nabla A - \nabla A \circ \Delta_j + [\Delta_j, A] \circ \nabla \quad .$$

Ainsi s'achève la démonstration du théorème 9.

CHAPITRE IV - LA CLASSE $S^0_{1,1}$

1.- REGULARITE EN x ET CROISSANCE EN ξ.

Il n'est pas arbitraire de consacrer un chapitre aux symboles exotiques ; il y a en effet, pour un symbole $\sigma(x,\xi)$, deux façons d'être irrégulier : soit parce qu'il a peu de dérivées en x, soit parce que ses dérivées en x "explosent" quand ξ devient grand.

Quand il s'agira d'obtenir de bonnes propriétés pour l'O.P.D. $Op(\sigma)$, une décroissance suffisante en $|\xi|$ compensera le défaut de différentiabilité en x, et inversement. Considérons par exemple un symbole de classe $Cl^m(\mathbb{R}^n, L^\infty)$, avec $m < 0$ - autrement dit d'ordre négatif en ξ, sans aucune régularité en x. On constate [42] que le noyau $K(x,y)$ de $Op(\sigma)$ vérifie une inégalité $|K(x,y)| \leq k(x-y)$, où $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$; dès lors $Op(\sigma)$ est trivialement borné sur L^p $(1 < p < +\infty)$. Cette dernière conclusion a, nous allons le voir, un caractère tout à fait général.

Nous introduisons des fonctions ω et Ω qui mesurent, respectivement, la régularité en x et la décroissance quand $|\xi| \to \infty$. Plus précisément ω est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$, croissante et concave (nous n'imposons pas $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$) ; Ω est une application de $\mathbb{R}^+$ dans $[1,+\infty[$ à qui nous demandons d'être à peu près constante sur chaque couronne dyadique ; de façon plus précise, il existe $C > 0$ tel que, pour tous $s,t \in \mathbb{R}^+$, $\frac{1}{2} \leq \frac{s}{t} \leq 2$ implique $\Omega(s) \leq C\,\Omega(t)$.

Théorème 10.- La condition $\sum_{j\geq 0} \omega^2(2^{-j})\,\Omega^2(2^j) < +\infty$ est nécessaire et suffisante pour que tout symbole $\sigma(x,\xi)$ vérifiant les estimations

$$(1) \qquad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1 + |\xi|)^{-|\alpha|}$$

$$(2) \qquad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha \omega(|h|)\,\Omega(|\xi|)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

conduise à un O.P.D. $Op(\sigma)$ borné sur L^p $(1 < p < \infty)$.

On trouvera une démonstration du théorème 10 en annexe II.

2.- CONTINUITE DES O.P.D. DE LA CLASSE $Op^0_{1,1}$.

Les O.P.D. dont le symbole vérifie

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$$

ne satisfont pas les hypothèses du théorème 10 ; nous verrons effectivement qu'ils ne sont pas nécessairement bornés sur L^2 ; par contre, ils sont bornés sur tout H^s, pour $s > 0$.

Pour donner à cette assertion un sens aussi précis que possible, nous limiterons la régularité en x ; étant donné un nombre réel r, positif, non entier, on considère les symboles qui vérifient

$$(3) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_\alpha(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|} \quad \text{pour } |\beta| < r,$$

$$(4) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \le C_\alpha |h|^{r-[r]} (1+|\xi|)^{r-|\alpha|}$$

$$\text{pour } |\beta| = [r] .$$

Si r est entier la condition (4) est remplacée par une condition de Zygmund.

Théorème 11.- Tout O.P.D. dont le symbole $\sigma(x,\xi)$ satisfait (3) et (4) est borné sur H^s_p $(1 < p < \infty)$ et sur $B^s_{p,q}$ $(p,q \in [1,+\infty])$ quel que soit $s \in]0,r[$; de plus il envoie $B^0_{p,1}$ dans L^p $(1 \le p \le +\infty)$.

Une paraphrase du lemme 2 conduit à se limiter aux symboles du type

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\ge 0} M_j(2^j x)\, \phi(2^{-j}\xi) ,$$

où (M_j) est une suite bornée dans C^r et ϕ est C^∞ à support dans la couronne $\frac{1}{2} \le |\xi| \le 2$.

Soit $M_j = \sum_{k\ge 0} M_{j,k}$ une décomposition de Littlewood-Paley où $\hat{M}_{j,0}$ est portée par $|\xi| \le 7$, $\hat{M}_{j,k}$ par $3 \cdot 2^k \le |\xi| \le 7 \cdot 2^k$ $(k \ge 1)$ et $\|M_{j,k}\|_\infty \le C\, 2^{-kr}$.

On pose $N_{j,h}(x) = M_{j,h-j}(2^j x)$; alors $N_{j,j}$ est portée par $|\xi| \le 7 \cdot 2^j$, $N_{j,h}$

par $3 \cdot 2^h \le |\xi| \le 7 \cdot 2^h$, pour $h > j$, et $\|N_{j,h}\|_\infty \le C\, 2^{(j-h)r}$.

Si on pose $\hat{f}_j(\xi) = \phi(2^{-j}\xi)\, \hat{f}(\xi)$, $Op(\sigma)(f)$ s'écrit

$$\sum_{j\ge 0} N_{j,j}\, f_j + \sum_{h\ge 1} \{ \sum_{j=0}^{h-1} N_{j,h}\, f_j \} .$$

$(\sum_{j=0}^{h-1} N_{j,h}\, f_j)^\wedge$ étant portée par $2^h \le |\xi| \le 9 \cdot 2^h$, la proposition 2 donne

$$\| \sum_{h\ge 1} \{ \sum_{j=0}^{h-1} N_{j,h}\, f_j \} \|_{H^s_p} \le C \, \| (\sum_{h\ge 1} 4^{h(s-r)} \, | \sum_{j=0}^{h-1} 2^{jr}\, f_j |^2)^{1/2} \|_p \ ;$$

grâce au lemme 4, le second membre ci-dessus est majoré par

$C' \, \| (\sum_{j\ge 0} 4^{sj} \, |f_j|^2)^{1/2} \|_p$ dès que $s < r$. De même

$$\| \sum_{h\ge 1} \{ \sum_{j=0}^{h-1} N_{j,h}\, f_j \} \|_{B^s_{p,q}} \le C \, \{ \sum_{h\ge 1} 2^{hq(s-r)} (\sum_{j=0}^{h-1} 2^{jr} \, \|f_j\|_p)^q \}^{1/q}$$

$$\le C' \, \|f\|_{B^s_{p,q}} \ ,$$

toujours grâce au lemme 4.

$(N_{j,j} f_j)^\wedge$ est portée par $|\xi| \le 9 \cdot 2^j$: pour $s > 0$ on a donc

$$\| \sum_{j\ge 0} N_{j,j}\, f_j \|_{H^s_p} \le C \, \| (\sum_{j\ge 0} 4^{sj} \, | N_{j,j}\, f_j |^2)^{1/2} \|_p$$

$$\le C' \, \| (\sum_{j\ge 0} 4^{sj} \, |f_j|^2)^{1/2} \|_p$$

$$\le C'' \, \|f\|_{H^s_p}$$

et les estimations analogues pour les normes $B^s_{p,q}$.

Le cas $s = 0$ s'étudie à part. Si $f \in B^0_{p,1}$, on a $\sum_{j\ge 0} \|f_j\|_p < +\infty$; dès lors la série $\sum_{j\ge 0} N_{j,j}\, f_j$ converge normalement dans L^p et sa norme est

majorée par $C \|f\|_{B^0_{p,1}}$. C.Q.F.D.

Corollaire : Pour que l'opérateur T soit borné sur L^p $(1 < p < +\infty)$, il suffit que T et son adjoint appartiennent à $Op^0_{1,1}$.

En effet, si $T^* \in Op^0_{1,1}$, T^* est borné sur H^s_p, avec $s > 0$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$; alors T est borné sur le dual de H^s_p, qui n'est autre que H^{-s}_p ; L^p étant un espace d'interpolation complexe entre H^{-s}_p et H^s_p, on en déduit que T est borné sur L^p. C.Q.F.D.

3.- PATHOLOGIE ORDINAIRE DE $Op^0_{1,1}$: EXEMPLES ET CONTRE-EXEMPLES .

Voici un exemple simple de symbole de la classe $S^0_{1,1}$, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j \geq 0} \exp(-i\, 2^j x)\, \phi(2^{-j}\xi), \tag{5}$$

où ϕ est C^∞ à support compact ne contenant pas 0 ; plus précisément, nous supposons que ϕ est positive, portée par $[\frac{5}{6}, \frac{5}{3}]$, égale à 1 sur $[1, \frac{4}{3}]$.

A l'aide de (5), on vérifie d'abord que le théorème 11 est optimal.

Posons $f_m = \sum_{j=0}^{m} \omega_j \exp(i\, 2^j x)\, \psi(x)$, où $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\hat{\psi}$ est portée par $[0, \frac{1}{3}]$, $(\sum_{j \geq 0} \omega_j^q)^{1/q} < +\infty$ $(1 < q \leq +\infty)$. Alors (f_m) est une suite bornée dans $B^0_{2,q}$, mais

$$Op(\sigma)(f_m) = (\sum_{j=0}^{m} \omega_j)\psi \ .$$

Ainsi, pour $q > 1$, $Op(\sigma)$ n'envoie pas $B^0_{2,q}$ dans $\mathcal{D}'$ (ni a fortiori dans L^2 !).

Il n'est pas vrai non plus que $Op(\sigma)$ soit borné sur $B^0_{2,1}$. Posons en effet

$$f(x) = \sum_{j \geq 0} \omega_j \exp(i\, 2^j x)\, \check{b}_j(x), \tag{6}$$

où (ω_j) est une suite positive appartenant à $\ell^1(\mathbb{N})$ et b_j est une fonction

portée par $[0 , \frac{2^j}{3}]$, telle que $\|b_j\|_2 = 1$. Alors $f \in B^o_{2,1}$ et

$$Op(\sigma)(f)\hat{} \ (\xi) = \sum_{j\geq o} \omega_j \, b_j(\xi) \ .$$

Posons

$$h_k(\xi) = \sum_{j\geq o} \omega_j \, b_j(\xi) \, \phi(2^{-k}\xi) \ ; \tag{7}$$

l'assertion $Op(\sigma)(f) \notin B^o_{2,1}$ sera la conséquence de

$$\sum_{k\geq o} \|h_k\|_2 = +\infty \ ; \tag{8}$$

compte tenu des supports respectifs de $b_j(\xi)$ et de $\phi(2^{-k}\xi)$, on a

$$h_k(\xi) = \omega_{k+1} \, b_{k+1}(\xi)\phi(2^{-k}\xi) \ + \sum_{j\geq k+2} \omega_j \, b_j(\xi) \, \phi(2^{-k}\xi) \ ;$$

nous négligerons le premier terme, dont la norme L^2 est majorée par ω_{k+1}. Choisissons b_j de la façon suivante :

$$b_j(\xi) = 2^{-\frac{j}{2}} g(2^{-j}\xi), \text{ où } \|g\|_2 = 1 \text{ et } g \text{ portée par } [0 , \tfrac{1}{3}]. \tag{9}$$

Je prétends qu'en posant $g(\xi) = \dfrac{C}{\sqrt{\xi}\,|\operatorname{Log}\xi|}$ et $\omega_j = \dfrac{1}{j \operatorname{Log}^2 j}$, on obtient (8) ; en effet

$$\int |\sum_{j\geq k+2} \omega_j \, b_j(\xi) \, \phi(2^{-k}\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\geq \int_{2^k}^{\frac{4}{3}2^k} |\sum_{j\geq k+2} \omega_j \, \frac{1}{|\operatorname{Log} 2^{-j}\xi|}|^2 \, \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\geq \int_{1}^{\frac{4}{3}} |\sum_{j\geq k+2} \omega_j \, \frac{1}{|\operatorname{Log} 2^{k-j}\xi|}|^2 \, \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\geq \frac{1}{C} \Big(\sum_{j\geq k+2} \frac{\omega_j}{j-k}\Big)^2 \ ,$$

et l'on vérifie immédiatement que $\sum_k \sum_{j\geq k+2} \frac{\omega_j}{j-k} = +\infty$. C.Q.F.D.

$Op^0_{1,1}$ s'identifie à un sous-espace de $\mathcal{L}(H^1,H^1)$; on peut dès lors se demander si $Op^0_{1,1}$ est une sous-algèbre : nous allons voir qu'il n'en est rien ; plus précisément $Op(\sigma)^2$ n'envoie pas $B^0_{2,1}$ dans L^2.

σ est encore défini par (5) et f par (6) et (9) ; on va faire en sorte que $Op(\sigma)^2 f \notin L^2$. De la relation $(Op(\sigma)^2 f)\,\hat{}\,(\xi) = \sum_{k\geq 0} h_k(\xi+2^k)$, on tire

$$(10)\quad \|Op(\sigma)^2 f\|_2^2 \geq \sum_{m\geq 3} \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{\substack{j\geq k+2\\ \ell\geq m+2}} \omega_j\omega_\ell \int_{-\infty}^{+\infty} b_j(\xi+2^k) b_\ell(\xi+2^m)\phi(2^{-k}\xi+1)\phi(2^{-m}\xi+1)d\xi .$$

Pour $\xi \in [0\ ,\ \frac{2^k}{3}]$ et $m \geq k$, $2^{-k}\xi+1$ et $2^{-m}\xi+1$ appartiennent à $[1\ ,\ \frac{4}{3}]$; ainsi (10) est minorée par

$$(11)\quad \sum_{m\geq 3} \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{\substack{j\geq k+2\\ \ell\geq m+2}} \omega_j\omega_\ell\, 2^{-\frac{j}{2}}\, 2^{-\frac{\ell}{2}} \int_0^{\frac{2^k}{3}} g(2^{-j}(\xi+2^k))\, g(2^{-\ell}(\xi+2^m))\, d\xi \quad ;$$

dans l'intégrale ci-dessus, on a

$$2^{k-j} \leq 2^{-j}(\xi+2^k) \leq \frac{4}{3}\, 2^{k-j} \leq \frac{1}{3} \quad ,$$

et la même relation en remplaçant (k,j) par (m,ℓ) ; on est donc conduit à se donner la fonction g sur chacun des intervalles $[2^{-\nu}, \frac{4}{3}\, 2^{-\nu}]$ pour $\nu \geq 2$:

$$g(u) = \sum_{\nu\geq 2} \varepsilon_\nu\, 2^{\frac{\nu}{2}}\, F(2^\nu u - 1) \quad ,$$

où F est positive portée par $[0\ ,\ \frac{1}{3}]$, $\|F\|_2 = 1$ et $\sum_{\nu\geq 2} \varepsilon_\nu^2 = 1$; (11) devient

$$(12)\quad \sum_{m\geq 3} \sum_{k=2}^{m-1} \sum_{\substack{j\geq k+2\\ \ell\geq m+2}} \omega_j\omega_\ell\varepsilon_{j-k}\varepsilon_{\ell-m}\, 2^{\frac{k-m}{2}} \int_0^{\frac{1}{3}} F(u)\, F(2^{k-m}u)\, du \ .$$

Ecrivons, pour simplifier, $d_\mu = 2^{-\frac{\mu}{2}} \int_0^{\frac{1}{3}} F(u)\, F(2^{-\mu}u)\, du$ et $v_k = \sum_{j\geq k+2} \omega_j\varepsilon_{j-k}$;

(12) est encore égal à

$$(13) \qquad \sum_{m\geq 3} v_m \Big(\sum_{k=2}^{m-1} d_{m-k}\, v_k \Big) \quad ;$$

il reste à choisir F, ω et ε de façon que (13) soit $+\infty$; on pose $F(u) = u^{-1/2} \, |\mathrm{Log}\, u|^{-2/3}$ $(u \in]0 , \frac{1}{3}])$, $\omega_j = j^{-1} \, \mathrm{Log}^{-2} j$, $\varepsilon_\nu = c\, \nu^{-1/2} \, \mathrm{Log}^{-1} \nu$; l'analyse élémentaire donne alors les estimations suivantes :

$$d_\mu \approx \mu^{-\frac{1}{3}} \quad , \quad v_k \approx k^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{Log}^{-3} k \quad , \quad \sum_{k=2}^{m-1} d_{m-k} v_k \approx m^{+\frac{1}{6}} \, \mathrm{Log}^{-3} m \quad ;$$

finalement le terme général de (13) est équivalent à $C\, m^{-\frac{1}{3}} \, \mathrm{Log}^{-6} m$. C.Q.F.D.

Ajoutons que $\mathrm{Op}(\sigma)^* \notin \mathrm{Op}^0_{1,1}$, sinon $\mathrm{Op}(\sigma)$ serait borné sur L^2 (corollaire du théorème 11) ; on vient ainsi d'établir la

Proposition 13.- La classe $\mathrm{Op}^0_{1,1}$ n'est pas une algèbre d'opérateurs et elle n'est pas autoadjointe ; plus précisément, il existe $T \in \mathrm{Op}^0_{1,1}$ tel que T^2 et T^* n'appartiennent pas à $\mathrm{Op}^0_{1,1}$.

Le fait que T ne soit pas borné sur L^2 joue un rôle essentiel dans la démonstration de la proposition 13 ; on peut dès lors se demander si, en rajoutant la condition d'être borné sur L^2, on obtient une algèbre autoadjointe ; ce résultat est tout aussi faux :

Proposition 14.- Le sous-espace de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ formé des opérateurs, bornés sur L^2, dont le symbole appartient à $S^0_{1,1}$ n'est ni une sous-algèbre, ni une partie auto-adjointe.

Pour démontrer la proposition 14, nous construisons un O.P.D. borné sur $L^2(\mathbb{R})$ de la façon suivante : soient $\delta > 0$, $\theta \in \mathcal{D}$ telle que $0 \notin \mathrm{supp}\, \theta$ et

$$(14) \qquad \sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} \exp(-i\delta 2^j x)\theta(2^{-j}\xi)$$

Nous allons voir que $Op(\sigma)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$, si et seulement si $\theta(\delta) = 0$.

Supposons en effet que $\theta(\delta) = 0$; on va montrer que l'adjoint de $Op(\sigma)$ est borné sur $L^2(\mathbb{R})$. $Op(\sigma)^*$ a pour symbole

$$\tau(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} \exp(i\delta 2^j x)\psi(2^{-j}\xi), \tag{15}$$

où $\psi(\xi) = \bar{\theta}(\xi+\delta)$; on a donc

$$(Op(\tau)f)\hat{}\,(\xi) = \sum_{j\geq 0} \bar{\theta}(2^{-j}\xi)\,\hat{f}(\xi - 2^j\delta) \ ;$$

la somme ci-dessus étant trivialement presque-orthogonale, on a

$$\|Op(\tau)f\|_2^2 \leq C \sum_{j\geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(2^{-j}\xi)|^2 |\hat{f}(\xi - 2^j\delta)|^2 \, d\xi$$

$$= C \sum_{j\geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(2^{-j}\eta + \delta)|^2 |\hat{f}(\eta)|^2 \, d\eta \ .$$

On répartit les η dans les couronnes dyadiques $\Gamma_0 = \{\eta/|\eta| \leq 1\}$, $\Gamma_k = \{\eta/2^{k-1} < |\eta| \leq 2^k\}$; puis on observe qu'il existe un entier N tel que, pour $j < k - N$, Γ_k ne rencontre pas le support de $\eta \longmapsto \theta(2^{-j}\eta + \delta)$; enfin on applique la majoration $|\theta(\eta+\delta)| \leq C|\eta|$; ainsi

$$\|Op(\sigma)f\|_2^2 \leq C \sum_{k\geq 0} \sum_{j=k-N}^{\infty} 4^{k-j} \int_{\Gamma_k} |\hat{f}(\eta)|^2 \, d\eta$$

$$\leq C' \|\hat{f}\|_2^2 \ .$$

Supposons maintenant $\theta(\delta) \neq 0$; on va montrer que $Op(\tau)$ n'envoie pas $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = 1$ sur $[-\frac{\delta}{4}, +\frac{\delta}{4}]$ et $\hat{f} = 0$ en dehors de $[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}]$; alors

$$(Op(\tau)f)\hat{}\,(\xi) = \sum_{j\geq 0} \psi(2^{-j}(\xi - 2^j\delta))\,\hat{f}(\xi - 2^j\delta) \ ;$$

dans la somme ci-dessus, les termes sont deux à deux orthogonaux, d'où

$$\|Op(\tau)f\|_2^2 \geq C \sum_{j\geq 0} \int_{-\frac{\delta}{4}}^{+\frac{\delta}{4}} |\psi(2^{-j}\xi)|^2 \, d\xi \quad ;$$

maintenant, par hypothèse sur ψ, il existe $\varepsilon > 0$ et $c > 0$ tels que $|\xi| \leq \varepsilon$ entraîne $|\psi(\xi)| \geq c$; on en tire immédiatement $\|Op(\tau)f\|_2 = +\infty$. C.Q.F.D.

Cela dit, on considère le symbole $\sigma(x,\xi)$ défini par (14), où $\delta = 1$, θ est portée par $[-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, $\theta(\xi) = \xi - 1$ pour $\xi \in [\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$, $\theta(\xi) = 1$ pour $\xi \in [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$. On va voir successivement que $Op(\sigma)^*$ et $Op(\sigma)^2$ n'appartiennent pas à $Op^0_{1,1}$.

Le symbole de $Op(\sigma)^*$ est donné par (15) ; en dérivant par rapport à x, au sens des distributions, on obtient

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} i\, 2^j \exp(i\, 2^j x)\, \bar{\theta}(2^{-j}\xi + 1) \quad ;$$

ξ étant fixé, non nul, il existe N tel que, pour $j \geq N$, $\bar{\theta}(2^{-j}\xi + 1) = 2^{-j}\xi$; d'où

$$\frac{\partial \tau}{\partial x}(x,\xi) = \sum_{j<N} i\, 2^j \exp(i\, 2^j x)\psi(2^{-j}\xi) + i\,\xi \sum_{j=N}^{\infty} \exp(i\, 2^j x) \quad ;$$

le premier terme est une fonction C^∞ de x, le second est une distribution singulière ; ainsi $\tau(x,\xi)$ n'est même pas de classe C^1 en x.

Le symbole de $Op(\sigma)^2$ est

$$\pi(x,\xi) = \sum_{k,j\geq 0} \exp(-i(2^j + 2^k)x)\theta(2^{-k}\xi - 2^{j-k} - 1)\theta(2^{-j}\xi) \quad .$$

Fixons l'entier $N > 0$ et prenons $\xi = \frac{5}{4}\, 2^N$; alors $\theta(2^{-j}\xi) = 0$ pour $j \neq N$ et $\theta(2^{-N}\xi) = \frac{1}{4}$; de plus, $2^{-k}\xi - 2^{N-k} - 1 \in [-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}]$ pour $k \geq N$; d'où

$$4\,\pi(x,\xi) = \sum_{k\geq N} \exp(-i(2^N + 2^k)x) + \sum_{k<N} \exp(-i(2^N + 2^k)x)\theta(2^{-k}\xi - 2^{N-k} - 1)$$

$x \mapsto \pi(x,\xi)$ est donc, en fait, une distribution singulière. Ainsi s'achève la démonstration de la proposition 14.

4.- LES NOYAUX-DISTRIBUTIONS DE LA CLASSE $Op^0_{1,1}$.

Quand il s'agit de composer des opérateurs ou de calculer leurs adjoints, il est beaucoup plus commode de travailler avec les noyaux de ces opérateurs qu'avec leurs symboles ; aussi allons-nous décrire explicitement les noyaux de la classe $Op^0_{1,1}$.

Théorème 12.- Pour qu'un opérateur linéaire continu T de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ appartienne à $Op^0_{1,1}$, il faut et il suffit qu'il vérifie les deux propriétés suivantes :

i) son noyau-distribution $K \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ est, en dehors de la diagonale $x = y$, une fonction C^∞ telle que

$$(16) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta,m} |x-y|^{-m-|\alpha|-|\beta|} ,$$

pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ et $m \geq n$;

ii) pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $T(\phi)$ est une fonction C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées ; de plus, pour tous $\lambda \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on a

$$(17) \qquad \|\partial^\alpha T(\delta_\lambda \tau_a \phi)\|_\infty \leq C_\alpha(\phi)\lambda^{|\alpha|} ,$$

où la constante $C_\alpha(\phi)$ est invariante par multiplication de ϕ par un caractère normalisé $x \longmapsto e^{i\xi.x}$ $(|\xi| = 1)$.

Ajoutons ce commentaire : la propriété (16) donne à K un comportement en $|x-y|^{-n}$ quand (x,y) est proche de la diagonale ; elle ne détermine donc pas de façon "naturelle" une distribution sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ qui coïncide avec K en dehors de la diagonale ; d'où la nécessité d'une seconde condition, remplaçant la condition "historique" $\int_{S^{n-1}} K = 0$ pour les noyaux de convolution. Ici il s'agit d'une condition relativement faible, puisqu'on est loin d'exiger, par exemple, que C_α soit une norme.

On retrouve là les traits caractéristiques de la théorie de Calderón-Zygmund : si l'on ajoute aux estimations

$$K(x,y) \leq C|x-y|^{-n},\ |\nabla_x K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1},|\nabla_y K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1},$$

une propriété de continuité faible, telle que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B |Tf|^q dx\right)^{1/q} \leq \left(\frac{1}{|B|}\int_B |f|^r\, dx\right)^{1/r}$$

(pour deux réels q et r vérifiant $1 < q \leq r < +\infty$, et toute boule B de $\mathbb{R}^n$), T est alors un "opérateur de Calderón-Zygmund", nécessairement borné sur L^p $(1 < p < \infty)$ etc... (voir le chapitre IV de [15], notamment la prop. 6).

Voici maintenant les détails de la preuve.

Soit $\sigma \in S^0_{1,1}$ et $T = Op(\sigma)$. Du théorème 11, il résulte que T est un opérateur borné de $B^{|\alpha|}_{\infty,1}$ dans $L^\infty_{|\alpha|}$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$. En particulier, pour $\phi \in \mathcal{D}$,

$$\|\partial^\alpha T(\delta_\lambda\, \tau_a \phi)\|_\infty \leq C_\alpha \|\delta_\lambda\, \tau_a \phi\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}};$$

on applique alors la proposition 5 ; pour $\lambda \geq 1$, on a

$$\|\delta_\lambda\, \tau_a \phi\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}} \leq C_\alpha\, \lambda^{|\alpha|} \|\tau_a \phi\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}} \quad (|\alpha| > 0);$$

$$\|\delta_\lambda\, \tau_a \phi\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C_\alpha(\|\tau_a \phi\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\tau_a \phi\|_2)\ .$$

En observant que la translation τ_a est une isométrie de $B^s_{\infty,1}$ et de L^2, on obtient la relation (17), où $C_\alpha(\phi) = C_\alpha \|\phi\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}}$ pour $|\alpha| > 0$ et $C_0(\phi) = C_0(\|\phi\|_{B^0_{\infty,1}} + \|\phi\|_2)$; il n'est pas certain que C_α soit invariante par multiplication par $e^{i\xi.(\cdot)}$ $(|\xi| = 1)$, mais comme il s'agit d'une norme continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on peut la remplacer par

$$C'_\alpha(\phi) = \sup_{|\xi|=1} C_\alpha(e^{i\xi.(\cdot)}\phi)\ .$$

Le noyau-distribution de T vérifie $(2\pi)^n K(x,y) = R(x,x-y)$, où $R(x,-)\hat{}\ = \sigma(x,-)$; cette dernière égalité définit parfaitement

$R(x,-) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, puisque $\sigma(x,-)$ est à croissance polynomiale.

On vérifie d'abord que, pour N assez grand,

$$(18) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_z^\beta R(x,z)| \leq C_{\alpha,\beta,N} |z|^{-2N}$$

(d'où il découle que R est C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$).

En fait $z \longmapsto |z|^{2N} \partial_x^\alpha \partial_z^\beta R(x,z)$ a pour transformée de Fourier $\xi \longmapsto \Delta_\xi^N((i\xi)^\beta \partial_x^\alpha \sigma(x,\xi))$; les estimations $S^0_{1,1}$ impliquent

$$|\Delta_\xi^N((i\xi)^\beta \partial_x^\alpha \sigma(x,\xi))| \leq C_{\alpha,\beta,N} (1+|\xi|)^{|\alpha|+|\beta|-2N} \quad ;$$

il reste à choisir $2N > |\alpha| + |\beta| + n$ pour obtenir (18).

Pour étudier le comportement de $R(x,z)$ quand $|z| \to 0$, on choisit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 1$ et $\phi(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq \frac{1}{2}$ et l'on pose, pour $\lambda \leq 1$,

$$U_\lambda(x,-)^\wedge = (i\xi)^\beta \partial_x^\alpha \sigma(x,\xi)\, \phi(\lambda\xi)$$

$$V_\lambda(x,-)^\wedge = (i\xi)^\beta \partial_x^\alpha \sigma(x,\xi)(1-\phi(\lambda\xi)) \quad ;$$

dès lors $\partial_x^\alpha \partial_z^\beta R(x,z)$ s'écrit $U_{|z|}(x,z) + V_{|z|}(x,z)$ et l'inégalité (16) est une conséquence de

$$(19) \qquad |U_\lambda(x,z)| \leq C_{\alpha,\beta}\, \lambda^{-n-|\beta|-|\alpha|} \quad ,$$

$$(20) \qquad |z^p V_\lambda(x,z)| \leq C_{\alpha,\beta}\, \lambda^{-n-|\beta|-|\alpha|+|p|} \quad \text{(pour p assez grand).}$$

$U_\lambda(x,-)^\wedge$ étant à support compact, on a immédiatement

$$|U_\lambda(x,z)| \leq (2\pi)^{-n} \int |\xi|^{|\beta|} |\partial_x^\alpha \sigma(x,\xi)|\, \phi(\lambda\xi)\, d\xi$$

$$\leq C_\alpha\, \lambda^{-|\alpha|} \int_{|\xi|\leq\lambda^{-1}} |\xi|^{|\beta|}\, d\xi$$

d'où (19).

$V_\lambda(x,z)$ s'estime comme une intégrale oscillante. On se donne $p \in \mathbb{N}^n$ et l'on calcule la transformée de Fourier de $z^p\, V_\lambda(x,z)$: c'est une combinaison linéaire des

$$(21) \qquad \xi^{\beta-q}\, \partial_x^\alpha\, \partial_\xi^r\, \sigma(x,\xi)\, \partial_\xi^s(1-\phi(\lambda\xi)) \ ,$$

où $p = q+r+s$ et $q \leq \beta$.

Pour $|s| > 0$, la fonction $\xi \longmapsto \partial_\xi^s(1-\phi(\lambda\xi))$ est portée par la couronne $(2\lambda)^{-1} \leq |\xi| \leq \lambda^{-1}$; le terme correspondant dans $z^p\, V_\lambda(x,z)$ est donc dominé par

$$C_{\alpha,\beta} \int_{(2\lambda)^{-1} \leq |\xi| \leq \lambda^{-1}} |\xi|^{|\beta|-|q|} (1+|\xi|)^{|\alpha|-|r|}\, \lambda^{|s|}\, d\xi$$

$$\leq C'_{\alpha,\beta} \lambda^{-n-|\beta|-|\alpha|+|p|} .$$

Pour $s = 0$, le module de (21) est majoré par $C_{\alpha,\beta} |\xi|^{|\beta|+|\alpha|-|p|}$; à ce moment, on choisit p de façon que $|\beta| + |\alpha| - |p| < -n$; le terme correspondant dans $z^p\, V_\lambda(x,z)$ est alors majoré par

$$C_{\alpha,\beta} \int_{|\xi| \geq (2\lambda)^{-1}} |\xi|^{|\beta|+|\alpha|-|p|}\, d\xi$$

$$\leq C'_{\alpha,\beta}\, \lambda^{-n-|\beta|-|\alpha|+|p|} \ ;$$

ceci achève la démonstration de (20).

Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ qui vérifie (16) et (17). Formellement, le symbole de T est

$$(22) \qquad \sigma(x,\xi) = \int K(x,y) e^{i\xi.(y-x)}\, dy \ .$$

Pour donner un sens à (22), on utilise une partition C^∞ de l'unité $\phi + \psi = 1$, où $\phi(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\phi(x) = 0$ pour $|x| \geq 2$; $\lambda \in [1,+\infty[$ étant fixé, (22) s'interprète comme la somme des deux

"symboles" suivants :

$$(23) \qquad \rho_\lambda(x,\xi) = \int K(x,y)\, e^{i\xi.(y-x)}\, \psi(\lambda(y-x))\, dy$$

$$(24) \qquad \pi_\lambda(x,\xi) = \int K(x,y)\, e^{i\xi.(y-x)}\, \phi(\lambda(y-x))\, dy\ .$$

On va voir que l'intégrale définissant ρ_λ est absolument convergente et que $\rho_\lambda(x,\xi)$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

En fait, $\partial_\xi^\alpha\, \partial_x^\beta(K(x,y)\, e^{i\xi.(y-x)}\, \psi(\lambda(y-x)))$ est une combinaison linéaire des

$$(25) \qquad \xi^{q-s}\, \lambda^{|r|}\, \partial_x^p\, K(x,y)(y-x)^t\, \psi^{(r)}(\lambda(y-x))\, e^{i\xi.(y-x)}\ ,$$

où $p+q+r = \beta$, $s+t = \alpha$, $s \le q$.

Faisons varier ξ dans la boule $|\xi| < M$ et x dans la boule $|x-x_0| < \frac{1}{2\lambda}$; (25) est alors une fonction continue de (x,ξ) dominée par la fonction

$$y \longmapsto C|y-x_0|^{-N}\, \mathbb{1}_{\{|y-x_0| \ge \frac{1}{2\lambda}\}}\ ,$$

avec N arbitrairement grand ; ce qui montre que (25) est absolument intégrable.

Pour interpréter (24), on peut poser

$$\phi_{\xi,\lambda,u}(y) = e^{i\xi.(y-u)}\phi(\lambda(y-u))$$

et

$$(26) \qquad \tilde{\pi}_\lambda(x,\xi,u) = (T\phi_{\xi,\lambda,u})(x).$$

De l'inégalité (17) et du théorème du graphe fermé, on déduit facilement que $\tilde{\pi}_\lambda$ est une fonction C^∞ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$; on est dès lors fondé à faire $u = x$ dans (26) et à définir $\pi_\lambda(x,\xi) = \tilde{\pi}_\lambda(x,\xi,x)$.

A l'issue de ce prologue, on définira la fonction C^∞ $\sigma(x,\xi)$ comme étant la somme $\rho_\lambda(x,\xi) + \pi_\lambda(x,\xi)$. Trois points restent à établir :

que σ ne dépend pas de λ, qu'il appartient à $S^0_{1,1}$, que c'est bien le symbole de T.

Observons que $\phi_{\xi,\lambda,u} - \phi_{\xi,1,u}$ est portée par $|y-u| \geq \lambda^{-1}$; donc pour $|x-u| < \lambda^{-1}$, $T(\phi_{\xi,\lambda,u} - \phi_{\xi,1,u})(x)$ est donné par l'intégrale convergente

$$\int K(x,y)(\phi_{\xi,\lambda,u} - \phi_{\xi,1,u})(y)\, dy \ ;$$

ceci nous donne précisément l'égalité

$$\pi_\lambda(x,\xi) - \pi_1(x,\xi) = - \rho_\lambda(x,\xi) + \rho_1(x,\xi) \quad .$$

Vérifions les inégalités $|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{|\beta|-|\alpha|}$.
$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \rho_\lambda(x,\xi)$ est une combinaison linéaire des intégrales convergentes

$$(27) \qquad \xi^{q-s}\, \lambda^{|r|} \int \partial_x^p K(x,y)(y-x)^t\, \psi^{(r)}(\lambda(y-x))\, e^{i\xi.(y-x)}\, dy \ ,$$

où $p+q+r = \beta$, $s+t = \alpha$, $s \leq q$.

Pour $|r| > 0$, le support de $y \longmapsto \psi^{(r)}(\lambda(y-x))$ est contenu dans $\lambda^{-1} \leq |y-x| \leq 2\lambda^{-1}$. En appliquant l'estimation $|\partial_x^p K(x,y)| \leq C_p |x-y|^{-n-|p|}$, on intègre et l'on fait $\lambda = |\xi|$. Finalement, le module de (27) est majoré par $C|\xi|^{|\beta|-|\alpha|}$.

Quand $r = 0$, on choisit $\gamma \in \mathbb{N}^n$ de sorte que $|\gamma| > |t| - |p|$; en multipliant (27) par ξ^γ et en intégrant par parties, on obtient une combinaison linéaire des

$$(28) \qquad \xi^{q-s}\, \lambda^{|\ell|} \int \partial_x^p\, \partial_y^j K(x,y)(y-x)^{t-k}\, \psi^{(\ell)}(\lambda(y-x)) e^{i\xi.(y-x)}\, dy \ ,$$

où $j + k + \ell = \gamma$, $k \leq t$.

Le cas $|\ell| > 0$ se traite comme le cas $|r| > 0$; pour $\ell = 0$, on majore $|\partial_x^p\, \partial_y^j K(x,y)|\, |y-x|^{|t|-|k|}$ par $C\, |x-y|^{-n-|p|-|t|-|\gamma|}$, on intègre et l'on fait $\lambda = |\xi|$; finalement le module de (28) est majoré par $|\xi|^{|\gamma|+|\beta|-|\alpha|}$.

Pour estimer $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \pi_\lambda(x,\xi)$, on écrit

$$\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\pi}_\lambda(x,\xi,u) = (\partial^\beta \circ T)(\partial_\xi^\alpha \phi_{\xi,\lambda,u})(x) \ ;$$

en appliquant (17) à la fonction $f_{\lambda,\xi}(z) = z^\alpha e^{i\lambda^{-1}\xi.z}\phi(z)$, on obtient

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{\pi}_\lambda(x,\xi,u)| \leq C_\beta(f_{\lambda,\xi})\ \lambda^{-|\alpha|+|\beta|} \quad .$$

On conclut en faisant $\lambda = |\xi|$ et en observant qu'alors $C_\beta(f_{\lambda,\xi})$ ne dépend, en fait, que de α et β.

On va voir maintenant que, pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$(29) \qquad T f(x_0) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix_0.\xi} \sigma(x_0,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi \ ;$$

pour cela on pose $f = f_1 + f_2$, où $f_1(y) = \psi(y - x_0)\ f(y)$; (29) est alors une conséquence de

$$(30) \qquad T f_1(x_0) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix_0.\xi} \rho_1(x_0,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi \quad \text{et}$$

$$(31) \qquad T f_2(x_0) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix_0.\xi} \pi_1(x_0,\xi)\ \hat{f}(\xi)\ d\xi \quad .$$

Pour montrer (30) on observe que $x_0 \notin \operatorname{supp} f_1$; dès lors $T f_1(x_0)$ est donné par l'intégrale convergente

$$\int K(x_0,y)\ \psi(y - x_0)\ f(y)\ dy \quad ;$$

(30) résulte du théorème de Fubini et de (23).

Appelons B la boule $\{y \in \mathbb{R}^n / |y - x_0| \leq 2\}$; en tant qu'élément de l'espace de Fréchet $\mathcal{D}(B)$, f_2 n'est autre que l'intégrale de Lebesgue

$$(32) \qquad (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.x_0}\ \hat{f}(\xi)\ \phi_{\xi,1,x_0}\ d\xi \ ;$$

la propriété (17) et le théorème du graphe fermé entraînent que T est un opérateur borné de $\mathcal{D}(B)$ dans L_∞^∞ ; il commute donc avec l'intégrale (32), ce qui donne, dans L_∞^∞,

$$(33) \qquad T f_2 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi.x_0}\ \hat{f}(\xi)\ T(\phi_{\xi,1,x_0})\ d\xi \ ;$$

pour obtenir (31), il suffit d'appliquer à (33) l'évaluation en x_0, qui est une forme linéaire continue sur L^∞_∞.

5.- UNE ALGEBRE MAXIMALE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS.

Nous en arrivons au principal résultat de ce chapitre : une description aussi explicite que possible de la plus grande sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ qui soit formée d'O.P.D. de la classe $Op^0_{1,1}$.

Théorème 13.- Il y a identité entre les quatre ensembles d'opérateurs suivants :

1) La plus grande partie auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ contenue dans $Op^0_{1,1}$;

2) la plus grande sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ contenue dans $Op^0_{1,1}$;

3) l'ensemble des $T \in Op^0_{1,1}$ tels que $T^* \in Op^0_{1,1}$;

4) l'ensemble des opérateurs linéaires continus T de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ dont le noyau vérifie (16) et tels que T et T^* vérifient (17).

Il est commode de noter $\mathcal{A}_j$ $(j = 1,\ldots,4)$ les ensembles décrits respectivement dans le théorème 13. L'égalité $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_4$ est une paraphrase du théorème 12 ; l'égalité $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_1$ provient du corollaire du théorème 11 ; l'inclusion $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$ est évidente. Il reste donc à montrer que $\mathcal{A}_4$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$; cela résultera de la

Proposition 15.- Si T_1, T_2 et T_2^* appartiennent à $Op^0_{1,1}$ il en est de même pour $T_1 \circ T_2$.

Rappelons que $T_1 \circ T_2$ est bien défini, disons comme opérateur borné sur $H^1(\mathbf{R}^n)$ et, a fortiori, comme opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$; c'est par le biais du théorème 12 qu'on va montrer que $T_1 \circ T_2 \in Op^0_{1,1}$.

Il s'agit d'abord d'établir

$$\|(\partial^\alpha \circ T_1 \circ T_2)(\delta_\lambda \tau_a \phi)\|_\infty \leq C_\alpha(\phi)\, \lambda^{|\alpha|} \tag{34}$$

($\lambda \geq 1$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in \mathcal{D}$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$).

Comme dans la preuve du théorème 12, la continuité de $T_1 : B^{|\alpha|}_{\infty,1} \to L^\infty_{|\alpha|}$ donne

$$\|(\partial^\alpha \circ T_1 \circ T_2)(\delta_\lambda\, \tau_a \phi)\|_\infty \leq C_\alpha \|T_2(\delta_\lambda\, \tau_a \phi)\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}} ;$$

dès lors (34) sera une conséquence de

$$\|T_2(\phi)\|_{B^s_{\infty,1}} \leq C_s \|\phi\|_{B^s_{\infty,1}} \qquad (s \geq 0). \tag{35}$$

Pour $s > 0$, (35) résulte du théorème 11 ; l'estimation $B^0_{\infty,1}$ s'obtient par dualité : l'hypothèse $T_2^* \in Op^0_{1,1}$ entraîne

$$\|T_2^*(\phi)\|_{B^1_{1,\infty}} \leq C \|\phi\|_{B^1_{1,\infty}} ; \tag{36}$$

$B^{-1}_{\infty,1}$ est le dual de l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans $B^1_{1,\infty}$; (36) implique donc

$$\|T_2(\phi)\|_{B^{-1}_{\infty,1}} \leq C \|\phi\|_{B^{-1}_{\infty,1}} ;$$

$B^0_{\infty,1}$ est l'espace d'interpolation réelle $[B^{-1}_{\infty,1}, B^1_{\infty,1}]_{\frac{1}{2},1}$ ([6], théorème 6.4.5) ; ainsi

$$\|T_2(\phi)\|_{B^0_{\infty,1}} \leq C \|\phi\|_{B^0_{\infty,1}} .$$

Le même raisonnement montrerait qu'en fait T_2 est borné sur tous les $B^s_{p,q}$ et H^s_p ($s \in \mathbb{R}$).

Désignant par K_j le noyau-distribution de T_j ($j = 1,2$), on est tenté d'écrire le noyau K de $T_1 \circ T_2$ sous la forme

$$(37) \qquad K(x,y) = \int K_1(x,z)\, K_2(z,y)\, dz \ .$$

Même pour $x \neq y$ (37) n'est pas une intégrale convergente ; dès lors, nous devons tour à tour :

1) Interpréter (37) à l'aide d'une partition convenable de l'unité.

2) Vérifier que K, ainsi définie,est, en dehors de la diagonale, une fonction C^∞ satisfaisant (16).

3) Montrer que K coïncide, en dehors de la diagonale,avec le noyau-distribution de $T_1 \circ T_2$.

Comme nous le verrons, les points 2 et 3 exigeront de la partition de l'unité un minimum de flexibilité ; en fait, elle dépendra de deux paramètres $a > 1$ et $\lambda > 0$.

On part de $h \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, portée par $[0,1]$, égale à 1 sur $[0,\frac{1}{2}]$ et l'on pose, pour $t \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_a(t) = h(a|t|), \quad \psi_a(t) = h(\frac{a}{|t|}), \quad \theta_a(t) = 1 - \phi_a(t) - \psi_a(t),$$

$$(38) \qquad U(x,y,a,\lambda) = \int K_1(x,z)\, \phi_a(\lambda(x-z))\, K_2(z,y)\, dz \ ;$$

V et W sont définies comme U, en remplaçant ϕ_a par ψ_a et θ_a. On va voir que U, V, W sont des fonctions C^∞ sur l'ouvert

$$\Omega = \{(x,y,a,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times]1,+\infty[\times]0,+\infty[\,/\, \frac{1}{\lambda a} < |x-y| < \frac{a}{\lambda}\}$$

(38) n'est pas une intégrale convergente (car $\phi_a(\lambda(x-z)) = 1$ pour $|x-z| \leq (2\lambda a)^{-1}$) ; on doit l'interpréter comme

$$(39) \qquad U(x,y,a,\lambda) = (T_1\, \Phi_{x,y,a,\lambda})(x) \ ,$$

où $\Phi_{x,y,a,\lambda}$ est la fonction $z \longmapsto \phi_a(\lambda(x-z))\, K_2(z,y)$.

Si $(x,y,a,\lambda) \in \Omega$ et $|x-y| \leq (\lambda a)^{-1}$, on a

$$|y-z| \geq |x-y| - \frac{1}{\lambda a} > 0,$$

donc $\Phi_{x,y,a,\lambda} \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; les estimations (17) montrent alors que $T_1\, \Phi_{x,y,a,\lambda}(t)$ est une fonction C^∞ de (x,y,a,λ,t).

De la même façon

$$W(x,y,a,\lambda) = (T_2^*\, \Theta_{x,a,\lambda})(y), \tag{40}$$

où $\bar{\Theta}_{x,a,\lambda}(z) = \theta_a(\lambda(x-z))\, K_1(x,z)$.

La fonction $z \mapsto \theta_a(\lambda(x-z))$ étant portée par $\frac{1}{2a\lambda} \leq |x-z| \leq 2a\lambda$, on a $\Theta_{x,a,\lambda} \in \mathcal{D}$ et $T_2^*\, \Theta_{x,a,\lambda}(t)$ est une fonction C^∞ de (x,a,λ,t).

Par contre l'intégrale

$$V(x,y,a,\lambda) = \int K_1(x,z)\, \psi_a(\lambda(x-z))\, K_2(z,y)\, dz \tag{41}$$

est absolument convergente ; en effet, sur Ω, on a $|x-z| \geq \frac{a}{\lambda} \Longrightarrow |y-z| \geq \frac{a}{\lambda} - |x-y| > 0$; le même raisonnement s'applique aux dérivées partielles de V, à n'importe quel ordre.

Ainsi la formule

$$K(x,y,a,\lambda) = (U+V+W)(x,y,a,\lambda) \tag{42}$$

définit une fonction C^∞ sur l'ouvert Ω.

Il est immédiat que $\frac{\partial K}{\partial a}$ et $\frac{\partial K}{\partial \lambda}$ sont identiquement nulles et que, pour chaque (x,y) l'ensemble des (a,λ) tels que $(x,y,a,\lambda) \in \Omega$ est connexe ; dès lors (42) définit une fonction $K(x,y)$, C^∞ en dehors de la diagonale.

On va vérifier maintenant les inégalités (16).

De (39) on tire

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta U(x,y,a,\lambda) = (\partial^\alpha \circ T_1)(\partial_y^\beta \Phi_{x,y,a,\lambda})(x) \quad ;$$

or $\partial_y^\beta \Phi_{x,y,a,\lambda}(z)$ s'écrit encore $A(\lambda(z-x))$, où

$$A(u) = \phi_a(u)\, \partial_y^\beta K_2(x+\lambda^{-1}u,y).$$

La continuité de $T_1 : B^{|\alpha|}_{\infty,1} \to L^\infty_{|\alpha|}$ et la proposition 5 conduisent à

$$(43) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta U(x,y,a,\lambda)| \le C_\alpha \sup(\lambda,1)^{|\alpha|}(\|A\|_{B^{|\alpha|}_{\infty,1}} + \|A\|_2).$$

(la norme L^2 n'est indispensable que pour $|\alpha| = 0$).

Pour estimer les normes de A, on observe que $\phi_a(u) \neq 0$ entraîne $|x+\lambda^{-1}u-y| > |x-y| - \frac{1}{\lambda a}$; d'où

$$\|A\|_2 \le \|\phi_a\|_2\, C_{\beta,m}(|x-y| - \tfrac{1}{\lambda a})^{-|\beta|-m}$$

$$\|A^{(\gamma)}\|_\infty \le C_{\gamma,\beta,m} \sum_{q\le|\gamma|} \lambda^{-q} (|x-y| - \tfrac{1}{\lambda a})^{-|\beta|-q-m}$$

On choisit alors $a = 2$, $\lambda = |x-y|^{-1}$ et (43) devient

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta U(x,y,2,|x-y|^{-1}) \le C_{\alpha,\beta,m}|x-y|^{-|\alpha|-|\beta|-m}$$

Pour estimer $\partial_x^\alpha \partial_y^\beta W$, les rôles de α et β et de x et y sont échangés, on utilise la continuité de $T_2^* : B^{|\beta|}_{\infty,1} \to L^\infty_{|\beta|}$.

Dans (41), on fait aussi $a = 2$, $\lambda = |x-y|^{-1}$; alors $\psi_a(\lambda(x-z)) \neq 0$ implique $|x-z| \ge 2|x-y|$ et $\frac{1}{2}|x-z| \le |y-z| \le \frac{3}{2}|x-z|$; en majorant $|\partial_x^\alpha K_1(x,z)|$ par $C_{\alpha,m}|x-z|^{-m-|\alpha|}$ $(m \ge n)$ et $|\partial_y^\beta K_2(z,y)|$ par $C_\beta |x-z|^{n-|\beta|}$, on obtient

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta V(x,y,2,|x-y|^{-1})| \le C_{\alpha,\beta,m} \int_{|x-z|\ge 2|x-y|} |x-z|^{-m-n-|\alpha|-|\beta|}\, dz$$

$$C'_{\alpha,\beta,m}\, |x-y|^{-m-|\alpha|-|\beta|}.$$

Pour vérifier que K est le noyau de $T_1 \circ T_2$ (en dehors de la diagonale), on se fixe $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ et x_o en dehors du support de f ; il s'agit d'établir l'égalité

$$(44) \qquad (T_1 \circ T_2)(f)(x_o) = \int K(x_o,y)\, f(y)\, dy$$

L'intégration est à effectuer sur une couronne $R^{-1} \leq |x_o - y| \leq R$, où $R > 1$ ne dépend que de f et x_o ; si l'on se fixe $a > R$, on a, sur le domaine d'intégration, $K(x_o,y) = K(x_o,y,a,1)$.

Nous posons $\Phi_{x_o,y,a,1} = \Phi_y$ et $\Theta_{x_o,a,1} = \Theta$; l'intégrale de (44) s'écrit alors

$$\int (T_1\, \Phi_y)(x_o) f(y)\, dy + \int \overline{T_2^*\, \Theta(y)}\, f(y)\, dy +$$

$$+ \int\int K_1(x_o,z)\, K_2(z,y)\, \psi_a(x_o - z)\, f(y)\, dy\, dz\ .$$

Pour traiter le premier terme, on observe que l'opérateur T_1 est linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans L^∞_∞ : il commute donc avec l'intégrale vectorielle $\int f(y)\, \Phi_y\, dy$; le terme sus-dit s'écrit alors $T_1(\tau_{x_o} \phi_a \cdot T_2 f)(x_o)$. Le second terme n'est autre que

$$\int \overline{\Theta(z)}\, T_2 f(z)\, dz$$

$$= \int \theta_a(x_o - z)\, K_1(x_o,z)\, T_2 f(z)\, dz$$

$$= T_1(\tau_{x_o}\, \theta_a \cdot T_2 f)(x_o)\ .$$

Le troisième terme est une intégrale convergente sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$: l'intégration s'effectue en effet sur le domaine $|x_o - z| \geq a$, $|y - z| \geq |x_o - z| - |y - x_o| \geq a - R$ et K_1, K_2 ont une décroissance rapide quand $|x - y| \to 0$.

Par Fubini, le troisième terme est donc encore $T_1(\tau_{x_o}\, \psi_a \cdot T_2 f)(x_o)$.

L'égalité $1 = \phi_a + \theta_a + \psi_a$ et la linéarité de τ_{x_o} et T_1 donnent l'égalité (44). C.Q.F.D.

CHAPITRE V. FONCTIONS QUI OPÈRENT SUR LES ESPACES DE SOBOLEV

Si, comme nous l'avons souligné en introduction, il existe un lien presque philosophique entre l'analyse non linéaire d'une part, les O.P.D. peu réguliers d'autre part, c'est une remarque beaucoup plus précise d'Yves Meyer qui est à l'origine des développements que nous allons présenter maintenant : si f appartient à $H^s_p(\mathbb{R}^n)$ $(s > \frac{n}{p})$ et est à valeurs réelles, et si $F \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, la fonction composée $F \circ f$ s'écrit $T_f(f)$, où T_f est un O.P.D. de la classe $Op^o_{1,1}$ [38].

On rejoint là un vaste chapitre de l'Analyse Harmonique. Etant donné une classe E de fonctions à valeurs réelles, quelles sont les fonctions $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui opèrent sur E par composition à gauche ?

Si E est une algèbre de Banach, pour la multiplication usuelle des fonctions, on sait que toute fonction analytique opère sur E ; on se demandera alors s'il existe d'autres fonctions (par exemple, de classe C^m) qui opèrent. Si E est seulement un espace vectoriel, la question est plus abrupte : existe-t-il, en dehors des fonctions linéaires, des fonctions qui opèrent sur E ?

Dans le cas des espaces de Sobolev L^p_m $(p \in [1,+\infty], m \in \mathbb{N})$ les résultats suivants sont classiques :

1°.- Pour $m > \frac{n}{p}$, L^p_m est une algèbre de Banach ; bien mieux, toute fonction de classe C^m opère sur L^p_m.

2°.- Toute fonction lipschitzienne opère sur L^p_1.

Dès lors, on pouvait escompter que toute fonction, disons C^∞ à support compact, opère sur L^p_m $(m \in \mathbb{N}, 1 \le p \le +\infty)$. Les résultats obtenus par D.R. Adams [1] puis B.E.J. Dahlberg [18] sur les potentiels de Riesz accréditaient cette conjecture (I. Krol [30] pensait même l'avoir démontrée) ; en fait, elle est fausse, comme Dahlberg l'a montré [19] ; plus précisément, si $m \in]1 + \frac{1}{p}, \frac{n}{p}[$, les seules fonctions qui opèrent sur L^p_m sont les fonctions linéaires.

Notre propos est triple : nous verrons que le théorème de Dahlberg s'étend aux espaces H^s_p et $B^s_{p,q}$ pour $1 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$; nous préciserons les

conditions suffisantes classiques dans les cas $s \leq 1 + \frac{1}{p}$ et $s \geq \frac{n}{p}$; enfin nous montrerons que des techniques similaires s'appliquent à certaines algèbres de Beurling.

1.- CONDITIONS NECESSAIRES : LE THEOREME DE DAHLBERG .

Dans ce paragraphe, E_p^s désignera indifféremment $B_{p,q}^s$ ($s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, $p,q \in [1,+\infty]$), H_p^s ($s \geq 0$, $1 < p < +\infty$), L_s^1 ($s \in \mathbb{N}$, si $p = 1$). On notera m l'unique entier tel que $m - 1 < s \leq m$.

Voici l'énoncé précis du théorème de Dahlberg :

Théorème 14.- Si $s \in]1 + \frac{1}{p}, \frac{n}{p}[$, toute fonction F de classe C^m qui opère sur E_p^s est nécessairement de la forme $F(t) = c\,t$.

La preuve s'effectue en deux temps : on montre que F est un polynôme, puis que c'est un polynôme du premier degré. Chaque étape constitue un énoncé intéressant en lui-même.

Proposition 15.- Si $s \in]1 + \frac{1}{p}, \frac{n}{p}[$, il existe une fonction $v \in E_p^s$ telle que, pour toute $F \in C^m(\mathbb{R})$ vérifiant $F^{(m)} \neq 0$, on ait $F \circ v \notin E_p^s$; de plus, on peut faire en sorte que v soit C^∞ ou à support compact.

Ajoutons ce commentaire : l'obstruction à ce que F opère provient aussi bien de la mauvaise régularité locale (cas où v est à support compact) que de la trop forte croissance de v et de ses dérivées à l'infini (cas où v est C^∞).

Voici l'idée de la démonstration :

Quand on veut induire des propriétés pour F à partir de celles de $F \circ u$, il est naturel de faire en sorte que u coïncide, au moins quelque part, avec une fonction coordonnée. Par translations et dilatations, c'est toute une famille de telles fonctions u_j que l'on construit ; la fonction v définitive est la somme des u_j ; les paramètres sont choisis de sorte que tous les u_j, à partir d'un certain rang, prennent leurs valeurs dans un intervalle $[a,b]$ où $F^{(m-1)}$ varie "beaucoup".

Donnons-nous une suite $(z^j)_{j\geq 1}$ de points alignés de $\mathbb{R}^n$ - disons une suite croissante sur l'un des axes de coordonnées. Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ une fonction portée par la boule $|x| \leq 2$, telle que $u(x) = x_1$ pour $|x| \leq 1$. On pose $u_j(x) = j^\beta u\,(j^\alpha(x - z^j))$ et $v = \sum_{j\geq 1} u_j$. (α et β sont deux réels positifs que nous déterminerons plus tard). La proposition 5 donne

$$\|u_j\|_{B^s_{p,1}} \leq C\, j^{\beta+\alpha(s - \frac{n}{p})} \quad ;$$

la première condition à imposer à (α,β) est donc

$$(1) \qquad \beta + \alpha(s - \tfrac{n}{p}) < -1 \ .$$

Si on souhaite que v soit C^∞, on imposera, disons, $|z^j - z^{j+1}| \geq 10$; si, au contraire, v doit être à support compact, on fait $|z^j - z^{j+1}| = j^{-\alpha}$, avec $\alpha > 1$; dans l'un et l'autre cas, on a

$$(2) \qquad B(z^j\ , \tfrac{1}{2j^\alpha}) \cap B(z^k\ , \tfrac{1}{2k^\alpha}) = \emptyset \qquad (j \neq k).$$

Passons maintenant à l'estimation de $F \circ v$. L'hypothèse "$F^{(m)}$ continue et non nulle" permet de trouver des réels $a < b$ et $c > 0$ tels que

$$(3) \qquad \forall\ t \in [a,b] \qquad |F^{(m)}(t)| \geq c.$$

On construit une suite de pavés P_k de sorte que, pour $x \in P_k$, on ait

$$(4) \qquad v(x) = k^{\alpha+\beta}(x_1 - z_1^k) \qquad \text{et}$$

$$(5) \qquad a\,k^{-\alpha-\beta} < x_1 - z_1^k < b\,k^{-\alpha-\beta} \quad ;$$

il suffit de définir P_k comme l'ensemble des x qui vérifient (5) et $|x_r - z_r^k| < (2\sqrt{n}\,k^\alpha)^{-1}$ $(r = 2,\ldots,n)$; alors, pour $k \geq N(a,b)$, on a

$$(6) \qquad P_k \subset B(z^k, \tfrac{1}{2k^\alpha}) \quad ;$$

(6) a pour conséquence, d'une part que les $(P_k)_{k\geq N}$ sont deux à deux dis-

joints, d'autre part que (4) est vérifiée sur P_k. Dès lors

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} (F \circ v) \right\|_p^p \geq \sum_{k \geq N} \int_{P_k} |k^{m(\alpha+\beta)} F^{(m)}(k^{\alpha+\beta}(x_1 - z_1^k))|^p \, dx$$

$$\geq c^p \sum_{k \geq N} k^{pm(\alpha+\beta)} \operatorname{vol} P_k$$

$$\geq C \sum_{k \geq N} k^{\alpha(pm-n) + \beta(pm-1)} \quad ,$$

où C est une constante strictement positive.

L'inégalité ci-dessus permet d'achever la démonstration quand s = m ; sinon on doit estimer le module de continuité de $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}} (F \circ v)$; pour cela on tire de (3) l'existence d'un petit $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, t \in [a,b] \,,\ \forall\, \theta \in [-\varepsilon,\varepsilon] \,,\ |F^{(m-1)}(t+\theta) - F^{(m-1)}(t)| \geq c|\theta| \quad ;$$

Fixons un moment $j \geq N$ et $t \in [\frac{\varepsilon}{(j+1)^{\alpha+\beta}} , \frac{\varepsilon}{j^{\alpha+\beta}}]$. Pour $N \leq k \leq j$, $|y| \leq t$ et $x \in P_k$, on a donc

$$v(x+y) = k^{\alpha+\beta}(x_1 + y_1 - z_1^k) \quad ;$$

ainsi $\omega_p(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F \circ v), t)^p$ est minoré par

$$\sum_{k=N}^{j} \int_{P_k} k^{p(m-1)(\alpha+\beta)} |F^{(m-1)}(k^{\alpha+\beta}(x_1 + y_1 - z_1^k)) - F^{(m-1)}(k^{\alpha+\beta}(x_1 - z_1^k))|^p \, dx$$

$$\geq C^p \sum_{k=N}^{J} k^{(\alpha+\beta)mp} \operatorname{vol}(P_k) \quad .$$

Finalement, en choisissant $|y| = |y_1| = t$, on obtient l'existence de $C > 0$ telle que

$$(7)\quad \omega_p\left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_1^{m-1}}(F\circ v),t\right) \geq C\, j^{-\alpha-\beta}\left(\sum_{k=N}^{j} k^{\beta(mp-1)+\alpha(mp-n)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

quel que soit $t \in \left[\frac{\varepsilon}{(j+1)^{\alpha+\beta}},\ \frac{\varepsilon}{j^{\alpha+\beta}}\right]$.

Le moment est venu de choisir α et β de façon que $v \in E_p^s$ et $F\circ v \notin E_p^s$.

Le cas $s = m$ est le plus simple : il suffit que $v \in B_{p,1}^s$ et $\frac{\partial^m}{\partial x_1^m}(F\circ v) \notin L^p$, autrement dit qu'on ait (1) et $\alpha(ps-n)+\beta(ps-1) > -1$; compte tenu de $s < \frac{n}{p}$, cette double condition s'écrit encore

$$(8)\qquad \frac{\beta+1}{\frac{n}{p}-s} < \alpha < \frac{\frac{1}{p}+\beta\left(s-\frac{1}{p}\right)}{\frac{n}{p}-s}\ .$$

(8) est réalisable si $s > 1+\frac{1}{p}$: il suffit de faire

$$\beta > \frac{1-\frac{1}{p}}{s-\frac{1}{p}-1}\quad ;$$

si l'on veut que v soit à support compact, on impose de plus $\beta \geq \frac{n}{p}-s-1$.

Quand $m-1 < s < m$, on cherche à réaliser $v \in B_{p,1}^s$ et $\frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}}(F\circ v) \notin B_{p,\infty}^{\sigma}$, où $\sigma = s-m+1$; compte tenu de (7), la deuxième condition équivaut à

$$(9)\quad \sup_{j\in N}\left\{j^{(\alpha+\beta)(\sigma-1)}\left(\sum_{k=N}^{j} k^{\beta(mp-1)+\alpha(mp-n)}\right)^{\frac{1}{p}}\right\} = +\infty\quad ;$$

on constate que (9) est encore une conséquence de (8). C.Q.F.D.

Proposition 17.- Soient N un entier superieur à 1 et $0 \leq s < \frac{n}{p}$; il existe alors une fonction $h \in E_p^s$, à support compact, telle que, pour tout polynôme F de degré N, on ait $F\circ h \notin E_p^s$.

Si $F(0) \neq 0$, la fonction $h = 0$ convient : en effet, pour $p < +\infty$, E_p^s

ne contient pas de fonction constante autre que 0 ; on peut donc se restreindre au cas $F(0) = 0$. On démontrera le lemme suivant au paragraphe 2:

Lemme 9.- Soient τ un réel supérieur à $-\frac{n}{p}$, n'appartenant pas à $\mathbb{N}$, et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\phi(0) \neq 0$; alors la fonction $h(x) = |x|^\tau \phi(x)$ appartient à $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$ mais pas à $B_{p,q}^{\tau+\frac{n}{p}}$ pour $q < +\infty$.

Ceci admis, on choisit τ, non entier, dans l'intervalle

$$]s - \frac{n}{p}, \frac{1}{N}(s - \frac{n}{p})[$$; alors la fonction h du lemme 9 appartient à $B_{p,\infty}^{\tau+\frac{n}{p}}$ et donc à E_p^s.

Tout polynôme F, de degré N, peut s'écrire $F(t) = t^N G(t)$ $(t \neq 0)$, où G est C^∞ en dehors de l'origine et $\lim_{t\to+\infty} G(t)$, $\lim_{t\to-\infty} G(t)$ sont finies et non nulles.

Les hypothèses $\tau < 0$ et $\phi(0) \neq 0$ entraînent l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que $|x| \leq \varepsilon$ implique $|h(x)| \geq 1$. Soit $\psi_1 + \psi_2 = 1$ une partition C^∞ de l'unité, où ψ_1 est portée par $|x| \leq \varepsilon$ et ψ_2 par $|x| \geq \frac{\varepsilon}{2}$; on a alors

$$F \circ h = (F \circ h)\psi_1 + (F \circ h)\psi_2 .$$

Pour x assez grand, on a $h(x) = 0$; autrement dit $(F \circ h)\psi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. $F(h(x))\psi_1(x)$ s'écrit encore $|x|^{N\tau}\phi(x)^N G(h(x))\psi_1(x)$ et $\phi^N(G \circ h)\psi_1$ est C^∞, à support compact, non nulle à l'origine. Le lemme 9 montre que $(F \circ h)\psi_1$ n'appartient pas à $B_{p,1}^{\tau N+\frac{n}{p}}$, espace qui contient E_p^s. C.Q.F.D.

Pour compléter ce paragraphe sur les conditions nécessaires, citons deux théorèmes concernant les petites valeurs de s :

Théorème 15 (S. Igari [27]).- Toute fonction F qui opère sur $B_{2,1}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R})$ est localement lipschitzienne et nulle à l'origine.

Théorème 16 (M. Marcus et V.J. Mizel [35]).- Soit F une fonction qui opère sur $L_1^p(\mathbb{R}^n)$, alors $F(0) = 0$ et

(i) pour $p > n$, F est localement lipschitzienne,

(ii) pour $p < n$, F est lipschitzienne.

2.- FONCTIONS PUISSANCES DANS L'ESPACE DE BESOV (Lemme 9).

P. Brenner, V. Thomée et L. Wahlbin [10] ont donné la démonstration du lemme 9 en dimension 1 ; en dimension supérieure, il est commode de prouver une propriété un peu plus générale ; on suppose

$$h(x) = |x|^{\tau}\Omega(x)\phi(x) \quad ,$$

où $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\phi(0) \neq 0$ et Ω est homogène de degré 0, C^∞ en dehors de l'origine. On va d'abord montrer, par récurrence sur $m = -[-\tau - \frac{n}{p}] - 1$, que $h \in B^{\tau+\frac{n}{p}}_{p,\infty}$.

1°.- Le cas $m = 0$, $\sigma = \tau + \frac{n}{p} < 1$.

Posons $(\Delta_y h)(x) = h(x+y) - h(x)$; on a

$$\|\Delta_y h\|_p^p \leq \Big(\int_{|x|\leq 2|y|} + \int_{|x|\geq 2|y|} \Big) |\Delta_y h(x)|^p dx \ ;$$

dans la première intégrale, on majore trivialement $|\Delta_y h(x)|$ par $|h(x+y)| + |h(x)|$, ce qui donne

$$\int_{|x|<2|y|} |\Delta_y h(x)|^p \, dx \leq 2^p \int_{|x|\leq 3|y|} |h(x)|^p \, dx$$

$$\leq C \int_{|x|<3|y|} |x|^{\tau p} \, dx = C'|y|^{\sigma p} \ ;$$

dans la seconde integrale, le théorème des accroissements finis donne $|\Delta_y h(x)| < C|y||x|^{\tau-1}$, d'où

$$\int_{|x|>2|y|} |\Delta_y h(x)|^p dx \leq C|y|^p \int_{|x|>2|y|} |x|^{p(\tau-1)} dx = C'|y|^{p\sigma} .$$

Ainsi $\|\Delta_y h\|_p \leq C|y|^\sigma$ C.Q.F.D.

2°.- Le cas $m = 0$, $\sigma = 1$.

L'estimation porte sur la différence seconde

$$\Delta_y^2 h(x) = h(x+y) + h(x-y) - 2h(x).$$

Alors

$$\int_{|x|\leq 2|y|} |\Delta_y^2 h(x)|^p dx \leq 3^p \int_{|x|\leq 3|y|} |h(x)|^p dx \leq C|y|^p ;$$

la formule de Taylor à l'ordre 2 entraîne

$$|\Delta_y^2 h(x)| \leq C|y|^2 |x|^{\tau-2} \quad \text{(pour } |y| \leq \frac{|x|}{2}\text{), d'où}$$

$$\int_{|x|\geq 2|y|} |\Delta_y^2 h(x)|^p \leq C|y|^{2p} \int_{|x|\geq 2|y|} |x|^{p(\tau-2)} dx = C'|y|^p.$$

Finalement $\|\Delta_y^2 h\|_p \leq C|y|$.

3°.- La récurrence sur m.

Fixons un multiindice α tel que $|\alpha| \leq m$: la fonction $h^{(\alpha)}$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme

$$g_j(x) = |x|^{\tau-j} \Lambda(x)\psi(x),$$

où Λ est homogène de degré 0, C^∞ en dehors de 0, $\psi \in \mathcal{D}$, $j = 0,\ldots,|\alpha|$.

La relation $j < \tau + \frac{n}{p}$ montre que g_j appartient à L^p.

Il reste à voir que, pour $|\alpha| = m$, on a $g_j \in B^\sigma_{p,\infty}$, où $\sigma = \tau + \frac{n}{p} - m$.

Si $j \neq 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique et donne

$g_j \in B^{\cdots}_{p,\cdots} \subset B^{\cdots}_{p,\cdots}$.

Pour $j = 0$, on a $\tau + \frac{n}{p} > m \geq 1$, donc $g_j \in L^p_1 \subset B^\sigma_{p,\infty}$.

Maintenant on va voir que $h \notin B_{p,q}^{\tau+\frac{n}{p}}$, pour $q < \infty$.

1°.- Le cas $m = 0$, $\sigma = \tau + \frac{n}{p} < 1$.

Admettons un instant la propriété suivante :

(10) $\exists\, r \in \{1,\dots,n\}$, $\exists\, \eta > 0$, $\exists\, c > 0$, $\exists\, u_0 \in S^{n-1}$:

$$(0 < |x| \le \eta \quad \text{et} \quad |\frac{x}{|x|} - u_0| \le \eta) \Rightarrow |\frac{\partial h}{\partial x_r}(x)| \ge c|x|^{\tau-1} .$$

Ceci admis, on désigne par A_t l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$|\frac{x}{|x|} - u_0| \le \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad \delta t \le |x| \le \frac{\delta.\eta}{1+\delta} ,$$

où $\delta > 1$ est choisi de façon que $\frac{2}{\delta - 1} = \frac{\eta}{2}$.

Si $x \in A_t$ et $0 \le s \le t$, on a

$$|x + se_r| \le \eta \quad \text{et} \quad |\frac{x+se_r}{|x+se_r|} - u_0| \le \eta .$$

Alors (10) entraîne

$$\|\Delta_{te_r} h\|_p^p \ge \int_{A_t} |h(x+te_r) - h(x)|^p dx$$

$$\ge C\, t^p \int_{A_t} |x|^{(\tau-1)p} dx$$

$$\ge C' t^p (t^{p(\sigma-1)} - (\frac{\eta}{1+\delta})^{p(\sigma-1)})$$

$$\ge C'' t^{p\sigma} ,$$

dès que $t \le \varepsilon(n,p,\sigma)$; d'où on tire immédiatement que h n'appartient pas à $B_{p,q}^{\sigma}$.

Pour vérifier (10), on écrit

$$\frac{\partial h}{\partial x_r} = |x|^{\tau-1} \Omega_r(x)\phi(x) + |x|^{\tau} \Omega(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_r}(x),$$

où $\Omega_r(x) = \tau \frac{x_r}{|x|} \Omega(x) + |x| \frac{\partial \Omega}{\partial x_r}(x)$.

Je dis que Ω_r ne peut être identiquement nulle pour toute valeur de r : si c'était le cas on aurait (en multipliant par x_r et en sommant) $\tau |x| \Omega(x) = 0$ et, puisque $\tau \neq 0$, Ω serait identiquement nulle.

On choisit alors r de façon que $\Omega_r \neq 0$; la continuité de Ω_r sur S^{n-1} et l'hypothèse $\phi(0) \neq 0$ permettent de trouver $a > 0$, $u_0 \in S^{n-1}$ et $0 < \eta < a(\|\Omega\|_\infty \|\frac{\partial \phi}{\partial x_r}\|_\infty)^{-1}$ tels que $|x| \leq \eta$ et $|\frac{x}{|x|} - u_0| \leq \eta$ impliquent $|\Omega_r(x)\phi(x)| \geq 2a$. C.Q.F.D.

2°.- Le cas $m = 0$, $\sigma = 1$ se traite de façon analogue au 1°, en raisonnant sur les différences secondes.

3°.- Dans le cas général, il s'agit de montrer que, pour au moins un $\alpha \in \mathbb{N}^n$, de longueur m, on a $h^{(\alpha)} \notin B^\sigma_{p,q}$, où $\sigma = \tau + \frac{n}{p} - m$.

On montre, par récurrence sur $|\alpha|$, que

$$h^{(\alpha)}(x) = |x|^{\tau - |\alpha|} \Omega_\alpha(x)\phi(x) + g_\alpha(x),$$

où g_α est une somme de fonctions de la forme

$$|x|^{\tau - j} \Lambda(x)\psi(x) \qquad (j = 0, \ldots, |\alpha| - 1) \quad \text{et}$$

$$\Omega_{\alpha + e_r}(x) = (\tau - |\alpha|) \frac{x_r}{|x|} \Omega_\alpha(x) + |x| \frac{\partial \Omega_\alpha}{\partial x_r}(x) ;$$

comme dans la preuve de (10), on voit qu'il existe au moins un α, de longueur m, tel que $\Omega_\alpha \neq 0$; l'étude du cas $m = 0$ montre alors que la fonction $x \mapsto |x|^{\tau - |\alpha|} \Omega_\alpha(x)\phi(x)$ n'appartient pas à $B^\sigma_{p,q}$. Quant aux fonctions g_α, elles appartiennent à $B^{\tau - j + \frac{n}{p}}_{p,\infty}$, lui-même contenu dans $B^\sigma_{p,q}$, puisque $\tau - j + \frac{n}{p} > \sigma$.

Ainsi s'achève la démonstration du lemme 9.

3.- CONDITIONS SUFFISANTES .

On peut les résumer dans l'énoncé suivant :

Théorème 17.- Soit F une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, s'annulant à l'origine ; pour que F opère sur H^s_p ($s \geq 0$, $1 < p < +\infty$), $B^s_{p,q}$ ($s > 0$, $p,q \in [1,+\infty]$) et L^p_s ($s \in \mathbb{N}$, $p = 1$), les conditions suivantes sont suffisantes, respectivement :

(i) $F' \in L^\infty$, quand $s \in [0,1]$ (le cas de $B^1_{p,q}$ excepté).

(ii) $F'' \in L^1$, quand $p = 1$ et $1 \leq s \leq 2$ ($B^2_{1,q}$ excepté) .

(iii) $F' \in L^\infty_m$, où $m = [s] + 1$, quand $s \geq \frac{n}{p}$.

Corollaire.- Si F' appartient localement à L^∞_m, où $m = [s] + 1$, F opère sur H^s_p ($s > \frac{n}{p}$, $1 < p < \infty$), L^1_s ($s > n$ et $s \in \mathbb{N}$) et $B^s_{p,q}$ (pour $s > \frac{n}{p}$ si $q > 1$ et pour $s \geq \frac{n}{p}$ si $q = 1$) ; en particulier les espaces sus-dits sont des algèbres pour la multiplication usuelle des fonctions.

La preuve du corollaire est très simple. Désignons par E l'un des espaces considérés ; du théorème de plongement de Sobolev (voir, par exemple, [6], théorème 6.5.1), résulte la relation $E \subset L^\infty$; dès lors, si $f \in E$, on a $F \circ f = \phi F \circ f$, où $\phi \in \mathcal{D}$ vaut identiquement 1 sur l'image de f ; on applique alors l'assertion (iii) du théorème à la fonction ϕF ; enfin on fait $F(t) = t^2$, ce qui montre que E est une algèbre. C.Q.F.D.

La majeure partie du théorème 17 est classique et bien connue, notamment

- le cas où s est entier - espaces de Besov exceptés - (voir Stampacchia [46] quand $s = 1$, Adams [1] quand $s \geq \frac{n}{p}$).
- le cas des espaces de Besov pour $s > \frac{n}{p}$ (Peetre [44]).

Dans ces deux cas, l'hypothèse à faire sur F peut être améliorée : en fait, il suffit que $F' \in L^\infty_{m-1}$, où m est l'unique entier tel que $m - 1 < s \leq m$.

En rapprochant les théorèmes 14 et 17, on s'aperçoit qu'on ne possède

aucune condition, qu'elle soit nécessaire ou suffisante, quand $p > 1$ et $1 < s \leq 1+\frac{1}{p}$; d'où le

Problème A.- Montrer que toute fonction de classe C^1, dont la dérivée seconde satisfait une condition d'intégrabilité ad hoc, opère sur $B^s_{p,q}$ et sur H^s_p pour $p > 1$ et $1 < s \leq 1+\frac{1}{p}$.

Par ailleurs, il serait intéressant d'obtenir des théorèmes analogues à ceux d'Igari et de Marcus-Mizel pour les grandes valeurs de s ; voici la conjecture raisonnable :

Problème B.- Soient $s \geq \frac{n}{p}$, m l'unique entier tel que $m-1 < s \leq m$ et F une fonction qui opère sur $B^s_{p,q}$ (resp. H^s_p). Montrer que F' appartient localement à L^∞_{m-1}.

Nous allons démontrer maintenant les points non classiques du théorème 17.

1°.- Le cas $\boxed{s \in]0,1[}$

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne, s'annulant à l'origine et $f \in B^s_{p,q}$ (resp. H^s_p).

F étant continue, $F \circ f$ est une fonction mesurable et la relation $|F(t)| \leq \|F'\|_\infty |t|$ entraîne $|F \circ f| \leq \|F'\|_\infty |f|$; donc $F \circ f \in L^p$.

On a immédiatement $\omega_p(F \circ f,t) \leq \|F'\|_\infty \omega_p(f,t)$, ce qui termine la démonstration, dans le cas Besov.

Pour le cas de H^s_p, on utilise la caractérisation de cet espace par Strichartz [50] :

Une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ appartient à H^s_p $(0 < s < 1,\ 1 < p < +\infty)$ si et seulement si la fonction

$$x \mapsto |f(x)| + \left[\int_0^\infty \left(\int_{|y|<r} |f(x+ry)-f(x)|\,dy\right)^2 \frac{dr}{r^{1+2s}}\right]^{1/2}$$

appartient à L^p.

On observe alors que $\mathcal{D}_s(F \circ f) \leq \|F'\|_\infty \mathcal{D}_s f$.

2°.- Le cas $\boxed{p = 1,\ 1 \le s \le 2}$

On fait la démonstration pour $s = 2$ (c'est-à-dire sur L_2^1) ; le cas général s'en déduit par un procédé d'interpolation non linéaire.

Voici l'estimation de base :

Lemme 10.- *Pour toute fonction* $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$, *à valeurs réelles, et toute fonction* $G \in L^2(\mathbb{R})$, *la fonction* $(G \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *appartient à* L^2 *et*

$$(11) \qquad \|(G \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_2 \le \|G\|_2 \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\|_1^{1/2}$$

La fonction G n'est définie que presque partout; qui plus est, une modification de G sur un ensemble de mesure nulle peut entraîner une modification de $G \circ f$ sur un ensemble de mesure non nulle ; nous allons voir, par contre, que $(G \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est parfaitement définie, à un ensemble de mesure nulle près.

D'après un lemme de Gagliardo,Morrey et Calkin (voir [25]), on peut modifier f sur un ensemble de mesure nulle de telle sorte que f soit localement absolument continue sur presque toute droite parallèle à un axe de coordonnées ; $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est alors définie presque partout, et coïncide avec la dérivée de f au sens des distributions.

D'un lemme de la Vallée-Poussin [54], on déduit que $\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$ p.p. sur $f^{-1}(N)$, pour tout N de mesure nulle.

Ce point élucidé, on peut aborder la démonstration proprement dite.

On suppose, dans un premier temps, que G est continue et $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Posons $H(t) = \int_{-\infty}^{t} G(s)^2 ds$; alors H est une fonction de classe C^1, bornée, et

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x_j}((H \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}) = (G \circ f)^2(\frac{\partial f}{\partial x_j})^2 + (H \circ f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} \ ;$$

on intègre (12) par rapport à la variable x_j ; l'hypothèse $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ donne alors

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (G \circ f)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 dx_j + \int_{-\infty}^{+\infty} (H \circ f) \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2} dx_j .$$

Il suffit d'intégrer par rapport aux autres variables pour obtenir (11).

G étant toujours continue, on suppose que $f \in L_2^1(\mathbb{R}^n)$. Il est possible de trouver une suite (f_k) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, telle que $f_k \to f$, $\frac{\partial f_k}{\partial x_j} \to \frac{\partial f}{\partial x_j}$ presque partout et $\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j^2} \to \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$ dans L^1.

La continuité de G entraîne

$$(G \circ f_k) \frac{\partial f_k}{\partial x_j} \to (G \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{p.p.} \quad ;$$

on applique alors le lemme de Fatou :

$$\begin{aligned} \int (G \circ f)^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)^2 dx &\le \liminf_{k \to \infty} \int (G \circ f_k)^2 \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j}\right)^2 dx \\ &\le \liminf_{k \to \infty} \|G\|_2^2 \left\|\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j^2}\right\|_1 \\ &\le \|G\|_2^2 \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\right\|_1 . \end{aligned}$$

Voici enfin le cas général $G \in L^2$, $f \in L_2^1$. Il existe une suite de fonctions $G_k \in L^2 \cap C^0$ telles que $G_k \to G$ dans L^2 et presque partout.

Le lemme de la Vallée-Poussin s'applique de nouveau et montre que

$$(G_k \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \to (G \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{p.p.} \quad ;$$

on conclut encore à l'aide du lemme de Fatou. C.Q.F.D.

Soient $f \in L_2^1$ et $F'' \in L^1$; en modifiant au besoin F' sur un ensemble négligeable, on peut supposer que c'est une fonction continue et bornée ; alors

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(F \circ f) = (F' \circ f) \frac{\partial f}{\partial x_j} \quad \text{p.p.} \quad \text{et}$$

$$(13)\qquad \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell}(F \circ f) = (F' \circ f)\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell} + (F'' \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial f}{\partial x_\ell} \qquad \text{p.p.}$$

(la possibilité de dériver les fonctions composées par la règle classique est encore un résultat de La Vallée-Poussin).

Au second membre de (13), le premier terme appartient à L^1 et sa norme est majorée par $\|F'\|_\infty \, \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_\ell}\|_1$; la norme L^1 du second terme s'estime à l'aide du lemme 10 :

$$\|(F'' \circ f)\frac{\partial f}{\partial x_j}\,\frac{\partial f}{\partial x_\ell}\|_1 \le \||F'' \circ f|^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x_j}\|_2 \, \||F'' \circ f|^{1/2}\frac{\partial f}{\partial x_\ell}\|_2$$

$$\le \|F''\|_1 \, \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}\|_1^{1/2} \, \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_\ell^2}\|_1^{1/2} \quad ;$$

finalement $\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_\ell}(F \circ f)$ appartient à L^1 et

$$(14)\qquad \|\frac{\partial^2 (F \circ f)}{\partial x_j \partial x_\ell}\|_1 \le C(\|F''\|_1 + |F'(0)|)\,\|f\|_{L^1_2}\,.$$

Le passage au cas $1 \le s < 2$ s'effectue par un lemme d'interpolation dû à J. Peetre [44].

Lemme 11.- Soient E et F deux espaces de Banach tels que $E \subset F$ topologiquement ; T une application de F dans F, telle que $T(E) \subset E$, vérifiant

$$\|T(x) - T(y)\|_F \le C\,\|x - y\|_F \qquad (x, y \in F),$$

$$\|T(x)\|_E \le C\,\|x\|_E \qquad (x \in E).$$

Alors, pour tout $\theta \in]0,1[$ et $q \in [1,+\infty]$, T envoie l'interpolé réel $[E,F]_{\theta,q}$ dans lui-même.

Rappelons que $B^s_{1,q} = [L^1, L^1_2]_{\frac{s}{2},q}$ $(0 < s < 2)$; dès lors l'inégalité (14) et l'inégalité évidente

$$\|F \circ f - F \circ g\|_{L^1} \le \|F'\|_\infty \, \|f - g\|_{L^1}$$

permettent d'appliquer le lemme de Peetre à l'application $T(f) = F \circ f$.

C.Q.F.D.

3°.- Le cas $\boxed{s \geq \frac{n}{p}}$

La preuve que nous donnons est due à Yves Meyer [38] ; elle consiste à écrire $F \circ f = Op(\sigma)(f)$, où σ est un symbole de la classe $S^0_{1,1}$, à régularité limitée en x, dépendant - évidemment - de f.

On part d'une décomposition de Littlewood-Paley $f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f$; on note $S_j f$ la somme partielle $\sum_{k=0}^{j} \Delta_k f$ et $S_{-1} f = 0$. Alors $S_j f$ "converge" vers f ; par "continuité" $F \circ S_j f$ converge vers $F \circ f$ et l'on peut écrire

$$(15) \qquad F \circ f = \sum_{j\geq 0} (F \circ S_j f - F \circ S_{j-1} f) \ ;$$

bien entendu, il faut donner un sens précis aux termes "converge" et "continuité" employés ci-dessus. Par hypothèse, F est, au moins, lipschitzienne ; on a donc

$$\| F \circ f - F \circ g \|_p \leq \| F' \|_\infty \| f - g \|_p$$

et l'opérateur de composition par F est continu sur L^p $(1 \leq p \leq +\infty)$.

Si $s > \frac{n}{p}$ (ou $s = \frac{n}{p}$ et $q = 1$) le théorème de Sobolev donne H^s_p (resp. $B^s_{p,q}$) $\subset B^0_{\infty,1}$; autrement dit, la série de Littlewood-Paley converge normalement dans L^∞ et $S_j f$ converge uniformément vers f ; dès lors la série (15) est elle-même normalement convergente.

Si $s = \frac{n}{p}$ (et $q > 1$), $S_j f$ converge vers f dans L^p et la série (15) est normalement convergente dans L^p ; la relation (15) n'est plus une égalité ponctuelle entre deux fonctions mais seulement l'égalité de deux distributions.

Quoi qu'il en soit, on obtient

$$F \circ f = F \circ \Delta_0 f + Op(\sigma)(f) \ ,$$

où $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 1} M_j(x)\, \phi(2^{-j}\xi)$ et

$$M_j = \int_0^1 F' \circ (S_{j-1}f + t\,\Delta_j f)\,dt.$$

De $\Delta_0 f \in L^p_\infty$, on déduit aussitôt que $F \circ \Delta_0 f$ appartient à L^p_{m+1}.

Pour appliquer le théorème 11 à $Op(\sigma)(f)$, il suffit de montrer

$$(16) \qquad \|M_j^{(\alpha)}\|_\infty \leq C\, 2^{j|\alpha|} \quad \text{pour } 0 \leq |\alpha| \leq m.$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient immédiatement $\|M_j\|_\infty \leq \|F'\|_\infty$; pour $|\alpha| > 0$, (16) va découler de $F' \in L^\infty_m$ et de

$$(17) \qquad \begin{cases} \|\partial^\alpha(S_j f)\|_\infty \leq C_\alpha 2^{j|\alpha|}\,, \\ \|\partial^\alpha(\Delta_j f)\|_\infty \leq C_\alpha 2^{j|\alpha|}\,. \end{cases} \qquad (|\alpha| > 0)$$

En fait, f appartient à $B^{\frac{n}{p}}_{p,\infty}$; on a donc successivement

$$\|\Delta_j f\|_p \leq C\, 2^{-j\frac{n}{p}}\,,$$

$$\|\Delta_j f\|_\infty \leq C \qquad \text{(inégalité d'Young)},$$

$$\|(\Delta_j f)^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha 2^{j|\alpha|} \qquad \text{(inégalité de Bernstein)} ;$$

enfin $$\|(S_j f)^{(\alpha)}\|_\infty \leq \sum_{k=0}^{j} \|(\Delta_k f)^{(\alpha)}\|_\infty \leq C_\alpha \sum_{k=0}^{j} 2^{k|\alpha|}\,,$$

ce qui achève la preuve de (17) et celle du théorème 17.

4.- CONTINUITE DE LA CLASSE $Op^0_{1,1}$ SUR CERTAINS ESPACES DE BEURLING

Soit ω une fonction mesurable bornée sur $\mathbb{R}^n$ et A_ω l'espace de Hilbert des distributions tempérées f telles que

$$\|f\|^2_{A_\omega} = \int |\hat{f}(\xi)|^2\, \omega(\xi)\, d\xi < +\infty\,.$$

Dans le but de déterminer les fonctions qui opèrent sur A_ω, nous allons chercher à montrer que les opérateurs de la classe $Op^0_{1,1}$ sont bornés sur A_ω ; on sera amené à faire quelques hypothèses sur ω ;

la première, déjà rencontrée au chapitre IV, § 1, c'est que ω ne varie "pas beaucoup" sur chaque couronne dyadique :

Proposition 18.- Pour une fonction mesurable localement bornée ω de $\mathbb{R}^n$ dans $[1,+\infty[$ les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Pour tout $c > 1$, il existe $a > 0$ tel qu'on ait $\omega(\xi) \leq a\,\omega(\eta)$ dès que ξ et η appartiennent à la couronne $\Gamma_j(c)$ $(j \geq 0)$.

(ii) Même chose que (i) en remplaçant "pour tout $c > 1$" par "il existe $c_0 > \sqrt{2}$".

(iii) Pour tout $d > 1$, il existe $a > 0$ tel que l'on ait $\omega(\xi) \leq a\,\omega(\eta)$ dès que $d^{-1}|\eta| \leq |\xi| \leq d|\eta|$.

(iv) Même chose que (iii) en remplaçant "pour tout $d > 1$" par "il existe $d_0 > 1$".

Preuve de (ii) $\Longrightarrow$ (iv).

L'hypothèse $c_0 > \sqrt{2}$ garantit que $\Gamma_j(c_0) \cap \Gamma_{j+1}(c_0)$ est non vide : on peut donc choisir ξ_j dans cet ensemble. Soient ξ et η tels que

$$\frac{|\eta|}{2} \leq |\xi| \leq 2|\eta| \quad ,$$

comme il n'y a pas de problème au voisinage de 0, on peut toujours supposer que $\xi \in \Gamma_N(c_0)$ et $\eta \in \Gamma_M(c_0)$, où N et M sont deux entiers positifs. Si $N > M$ on écrit

$$\frac{\omega(\xi)}{\omega(\eta)} = \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi_N)} \frac{\omega(\xi_N)}{\omega(\xi_{N-1})} \cdots \frac{\omega(\xi_{M+1})}{\omega(\xi_M)} \frac{\omega(\xi_M)}{\omega(\eta)} \quad ,$$

d'où $\omega(\xi) \leq a^{N-M+2}\omega(\eta)$; de même, si $N \leq M$, on a $\omega(\xi) \leq a^{M-N+2}\omega(\eta)$. On a $|N - M| \leq 1 + 2\,\frac{\text{Log } c_0}{\text{Log } 2}$, d'où $\omega(\xi) \leq C(a,c_0)\,\omega(\eta)$.

Preuve de (iv) ⟹ (iii).

On suppose que

$$d^{-1}|\eta| \le |\xi| \le d|\eta| \ ;$$

en écartant le cas trivial où l'un des deux, ξ ou η, est nul, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$d_o^{k-1} < \frac{|\xi|}{|\eta|} \le d_o^k \ ;$$

posons $\xi_j = d_o^{-j}\xi$; quand $k \ge 0$, on trouve

$$\frac{\omega(\xi)}{\omega(\eta)} = \frac{\omega(\xi)}{\omega(\xi_1)} \ \frac{\omega(\xi_1)}{\omega(\xi_2)} \cdots \frac{\omega(\xi_k)}{\omega(\eta)} \le a^{k+1} \ ;$$

de même, si $k < 0$, on a $\omega(\xi) \le a^{-k+1}\omega(\eta)$.

Pour conclure, on observe que

$$-\frac{\text{Log } d}{\text{Log } d_o} \le k \le \frac{\text{Log } d}{\text{Log } d_o} + 1.$$

Les implications (iii) ⟹ (i) ⟹ (ii) sont triviales. C.Q.F.D.

Si ω satisfait l'une des conditions de la proposition 18, on peut fixer un vecteur unitaire ν et poser $u(t) = \omega(t\nu)$; alors $a^{-1}u(|\xi|) \le \omega(\xi) \le a\,u(|\xi|)$ et le poids $\xi \longmapsto u(|\xi|)$ définit le même espace A_ω ; ainsi peut-on formuler la première condition sur le poids ω :

(B1) ω est une fonction radiale $\omega(\xi) = u(|\xi|)$ et $u : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[$ vérifie :

$$\forall\, c > 1 \ \exists\, a > 0 \quad (c^{-1}t \le s \le ct \implies u(s) \le a\,u(t)).$$

La conséquence attendue de (B1) c'est qu'on peut caractériser les éléments de A_ω pour leurs séries de Littlewood-Paley. Pour cela, on considère la fonction ϕ du lemme 1 (avec $a = 2$, $c = 2$, $b = \frac{1}{2}$) et les opérateurs Δ_j ($j \ge 0$) qu'elle définit. Enfin, on pose $u_j = u(2^j)$.

Proposition 19.- Soit ω un poids satisfaisant (B1) ; il existe alors une constante $C > 0$, dépendant de ϕ et de n, telle que, pour tout $f \in A_\omega$, on ait

$$\sum_{j\geq o} u_j \|\Delta_j f\|_2^2 \leq C \|f\|_{A_\omega}^2 .$$

Inversement, pour tout $\gamma > 1$, il existe $C > 0$, telle que, pour toute suite $(f_j)_{j\geq o}$ de fonctions à spectres respectifs dans $\Gamma_j(\gamma)$, on ait

$$\|\sum_{j\geq o} f_j\|_{A_\omega}^2 \leq C \sum_{j\geq o} u_j \|f_j\|_2^2 .$$

L'hypothèse $\omega \geq 1$ entraîne immédiatement $A_\omega \subset L^2$ avec l'estimation $\|f\|_2 \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_{A_\omega}$; d'où $u_o \|\Delta_o f\|_2^2 \leq u_o \|\phi_o\|_\infty^2 \|f\|_2^2 \leq C \|f\|_{A_\omega}^2$.

La propriété (B1) entraîne $a_\omega(\xi) \geq u_j$ quel que soit $\xi \in \Gamma_j(2)$, d'où

$$u_j \|\Delta_j f\|_2^2 \leq (2\pi)^{-n} a \|\phi\|_\infty^2 \int_{\Gamma_j(2)} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi \quad ;$$

on observe alors que les couronnes $\Gamma_{2k}(2)$ $(k \geq 1)$ sont deux à deux disjointes, ce qui donne

$$\sum_{k\geq 1} u_{2k} \|\Delta_{2k} f\|_2^2 \leq C \sum_{k\geq 1} \int_{\Gamma_{2k}(2)} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi$$

$$\leq C \int_{\mathbf{R}^n} |\hat{f}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi \quad ;$$

le même raisonnement s'applique aux couronnes impaires.

Soit $(f_j)_{j\geq o}$ une suite de fonctions portées respectivement par $\Gamma_j(\gamma)$; si l'entier N est assez grand, les couronnes $\Gamma_{kN+r}(\gamma)$ - pour $r \in \{0,\ldots,N-1\}$ fixé, et k variant dans $\mathbf{N}$ - sont deux à deux disjointes ; on écrit alors

$$\|\sum_{j\geq o} f_j\|_{A_\omega} \leq \|f_o\|_{A_\omega} + \sum_{r=o}^{N-1} \|\sum_{k\geq o} f_{kN+r}\|_{A_\omega}$$

(pour r = 0, on somme à partir de k = 1).

D'abord $\|f_o\|^2_{A_\omega} \le \int_{|\xi|\le\gamma} |\hat{f}_o(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi \le C \|f_o\|^2_2$,

en effet ω est localement bornée ; ensuite

$$\|\sum_k f_{kN+r}\|^2_{A_\omega} = \sum_k \int_{\Gamma_{kN+r}(\gamma)} |\hat{f}_{kN+r}(\xi)|^2 \omega(\xi)\, d\xi$$

$$\le a \sum_k u_{kN+r} \|\hat{f}_{kN+r}\|^2_2$$

$$\le C \sum_{j\ge o} u_j \|f_j\|^2_2 \quad . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour achever l'"analyse dyadique" de la classe A_ω, il est essentiel, au vu des chapitres précédents, de savoir estimer $\|\sum_{j\ge o} f_j\|$, où $\hat{f}_j$ est portée, non plus par la couronne $\Gamma_j(\gamma)$, mais par la boule $|\xi| \le \gamma . 2^j$. En fait, sans hypothèse autre que (B1), $\sum_{j\ge o} f_j$ appartiendra à un espace $A_{\tilde{\omega}}$ plus grand que A_ω.

Lemme 12.- Soit $u : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[$ une fonction localement bornée telle que

$$\alpha = \int_1^\infty \frac{dt}{t\, u(t)} < +\infty \quad , \tag{18}$$

$$\frac{t}{2} \le s \le 2t \quad \text{implique } u(s) \le a\, u(t) \, , \tag{19}$$

et $\tilde{u}$ une fonction localement bornée, à valeurs dans $[1,+\infty[$, telle que

$$\tilde{u}(t) = \alpha \Big(\int_t^\infty \frac{d\theta}{\theta\, u(\theta)} \Big)^{-1} \quad , \text{ pour } t \ge 1.$$

Alors $\tilde{u}$ vérifie (19) et il existe $C > 0$ tel que

$$\tilde{u} \le C\, u \quad , \tag{20}$$

$$\frac{1}{C} \sum_{j\ge k} u(2^j)^{-1} \le \tilde{u}(2^k)^{-1} \le C \sum_{j\ge k} u(2^j)^{-1} \, . \tag{21}$$

En utilisant (19), on obtient, pour $t \in]2^{j-1},2^j]$:

$$(22) \qquad \frac{1}{\tilde{u}(t)} \geq \sum_{k\geq j} \int_{2^k}^{2^{k+1}} \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \geq \frac{\text{Log } 2}{a} \sum_{k\geq j} u(2^k)^{-1} ;$$

par ailleurs, $j \leq k$ implique $u(2^k) \leq a^{k-j}u(2^j)$; (22) donne alors

$$\frac{1}{\tilde{u}(t)} \geq \frac{1}{u(2^j)} \frac{\text{Log } 2}{a} \left(\sum_{k\geq j} a^{j-k} \right) = \frac{c}{u(2^j)} \geq \frac{c}{a\, u(t)} ,$$

c'est-à-dire (20).

Pour montrer que $\tilde{u}$ vérifie (19), on observe que $\tilde{u}$ est une fonction croissante ; dès lors, il suffit de trouver $A > 0$ tel que

$$(23) \qquad \int_t^\infty \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \leq A \int_s^\infty \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \qquad (s \in [t,2t]) ;$$

(23) équivaut à

$$(24) \qquad \int_t^{2t} \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \leq (A-1) \int_{2t}^\infty \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \qquad (t \geq 1).$$

Par (19) et (20), on a

$$\int_t^{2t} \frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \leq \frac{a \text{ Log } 2}{u(2t)} \leq \frac{c}{\tilde{u}(2t)} ;$$

On obtient donc (24), avec $A = 1 + c$.

L'inégalité de gauche, dans (21), est contenue dans (22) ; l'inégalité de droite s'obtient de la même façon. C.Q.F.D.

Pour le poids $\omega(\xi) = u(|\xi|)$, la condition (18) équivaut à

$$(B2) \qquad \int_{|\xi|\geq 1} \frac{d\xi}{|\xi|^n \omega(\xi)} < +\infty$$

Proposition 20.- Soient ω un poids vérifiant (B1) et (B2) et $\gamma \geq 1$; il existe alors une constante $C > 0$ telle que, pour toute suite $(f_j)_{j\geq 0}$ de fonctions à spectres respectifs dans les boules $|\xi| \leq \gamma . 2^j$, on ait

$$\| \sum_{j\geq o} f_j \|^2_{A_{\tilde{\omega}}} \leq C \sum_{j\geq o} u_j \|f_j\|_2^2 \ ,$$

avec $\tilde{\omega}(\xi) = \tilde{u}(|\xi|)$ et $\omega(\xi) = u(|\xi|)$ (où $\tilde{u}$ a été défini au lemme 12).

Pour un entier N, dépendant de γ, on a $\Delta_j(f_k) = 0$ dès que $k < j - N$; d'où

$$\|\Delta_j(\sum_k f_k)\|_2^2 = \int |\sum_{k\geq j-N} \Delta_j f_k|^2 dx$$

$$\leq (\sum_{k\geq j-N} \frac{1}{u_k}) \sum_{k\geq j-N} u_k \|\Delta_j f_k\|_2^2$$

$$\leq C\, \tilde{u}(2^j)^{-1} \sum_{k\geq j-N} u_k \|\Delta_j f_k\|_2^2$$

ainsi, par la proposition 19 ,

$$\|\sum_k f_k\|^2_{A_{\tilde{\omega}}} \leq C \sum_{j\geq o} \tilde{u}(2^j) \|\Delta_j(\sum_k f_k)\|_2^2$$

$$\leq C \sum_k u_k (\sum_{j\leq k+N} \|\Delta_j f_k\|_2^2)$$

$$= C' \sum_k u_k \int (\sum_{j\leq k+N} \phi^2(2^{-j}\xi)) \, |\hat{f}_k(\xi)|^2 d\xi \ ;$$

on termine la démonstration en observant que

$$\sum_{j\leq k+N} \phi^2(2^{-j}\xi) \leq 2 \|\phi\|_\infty^2 \ . \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Si ω vérifie (B1), l'ensemble des $\rho \geq 0$ tels que

$$\forall\, t \quad \forall\, s \ (\tfrac{s}{2} \leq t \leq 2s) \implies u(t) \leq 4^\rho u(s)$$

est fermé ; il admet donc un plus petit élément que nous noterons $\mathcal{K}_\omega$.

Théorème 18 .- Soit ω un poids vérifiant (B1) et (B2). Tout symbole de classe $S^0_{1,1}$ en ξ et de classe C^r en x ($r > \mathcal{K}_\omega$) définit un opérateur pseudo-différentiel qui envoie A_ω dans $A_{\tilde{\omega}}$.

La preuve du théorème 18 est une simple paraphrase de celle du théorème 11, dont nous reprendrons les notations ; ainsi $Op(\sigma)(f)$ s'écrit-il $\sum_{j\geq o} N_{j,j}f_j + \sum_{h\geq 1}\{\sum_{j=o}^{h-1} N_{j,h}f_j\}$, avec

$$\sum_{j\geq o} u_j \|f_j\|_2^2 \leq C \|f\|_{A_\omega}^2 ,$$

d'après la proposition 19.

Au premier terme, on applique la proposition 20 et l'inégalité $\|N_{j,j}\|_\infty \leq C$, ce qui donne

$$\|\sum_{j\geq o} N_{j,j}f_j\|_{A_{\tilde{\omega}}}^2 \leq C \sum_{j\geq o} u_j \|f_j\|_2^2 .$$

Au second terme, on applique la proposition 19 et l'inégalité $\|N_{j,h}\|_\infty \leq C\, 2^{(j-h)r}$:

$$\|\sum_{h\geq 1}(\sum_{j=o}^{h-1} N_{j,h}f_j)\|_{A_\omega}^2 \leq C \sum_{h\geq 1} 4^{-hr} u_h (\sum_{j=o}^{h-1} 2^{jr}\|f_j\|_2)^2 \quad . \tag{25}$$

La définition de $\mathcal{K}$ donne $u_h \leq 4^{(h-j)\mathcal{K}} u_j$; le second membre de (25) est donc majoré par

$$\sum_{h\geq 1} 4^{h(\mathcal{K}-r)} (\sum_{j=o}^{h-1} 2^{(r-\mathcal{K})j} u_j^{1/2}\|f_j\|_2)^2 \quad ; \tag{26}$$

Alors on applique l'hypothèse $\mathcal{K} < r$ et le lemme 4 : (26) est majoré par $\sum_{j\geq o} u_j \|f_j\|_2^2$. C.Q.F.D.

Maintenant, nous sommes en mesure de transposer aux espaces A_ω la démonstration du théorème 17 (cas $s \geq \frac{n}{p}$).

Deux nouvelles conditions seront imposées à ω. La première entraîne l'inclusion du type Sobolev $A_\omega \subset L^\infty$ (alors, pour $f \in A_\omega$, la suite

$\|\Delta_j f\|_\infty$ est bornée) ; cette condition s'écrit

(B3) $$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{\omega(\xi)} < +\infty \ .$$

(B3) entraîne (B2) : on peut donc appliquer le lemme 12 et introduire le poids $\tilde{\omega}$. La seconde condition garantit que $A_\omega = A_{\tilde{\omega}}$; compte tenu de (20) elle s'écrit

(B4) Il existe $C > 0$ tel que $\omega \leq C\tilde{\omega}$.

Ainsi s'achève la démonstration du

Théorème 19.- Soit ω un poids vérifiant les conditions (B1), (B3) et (B4). Alors toute fonction F, nulle à l'origine, de classe C^m ($m > \mathcal{K}_\omega + 1$), opère sur A_ω ; en particulier A_ω est une algèbre.

5.- AUTRES CONDITIONS SUR LES POIDS .

Observons d'entrée que la condition (B4) est satisfaite par la plupart des poids radiaux croissants (tels que $\omega(\xi) = |\xi|^\alpha \operatorname{Log}^\beta|\xi|$ pour $|\xi|$ grand, avec $\alpha > 0$) ; c'est ce que montre l'énoncé suivant, où nous convenons que deux poids ω_1 et ω_2 sont "équivalents" s'il existe $C \geq 1$ tel que $C^{-1}\omega_2 \leq \omega_1 \leq C\,\omega_2$.

Proposition 21.- Soit ω un poids vérifiant (B1) et (B2).

(i) Si ω vérifie (B4), alors ω est équivalent à un poids radial croissant ;

(ii) Si, pour un $\alpha > 0$, $|x|^{-\alpha}\omega(x)$ est équivalent à un poids radial croissant, alors ω vérifie (B4).

Le premier point est une banalité, puisque $\tilde{\omega}$ est un poids radial croissant ; pour établir le (ii), il suffit (avec les notations du lemme 12) d'obtenir

(27) $\quad u(t)\int_t^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \le C \qquad (t \ge 1)$;

l'hypothèse sur ω entraîne l'existence de $C > 0$ tel que $t \le s$ implique $\frac{u(t)}{t^\alpha} \le C\,\frac{u(s)}{s^\alpha}$; alors

$$u(t)\int_t^{+\infty}\frac{d\theta}{\theta u(\theta)} \le t^\alpha\int_t^{\infty}\frac{u(t)}{t^\alpha}\,\frac{\theta^\alpha}{u(\theta)}\,\frac{d\theta}{\theta^{\alpha+1}}$$

$$\le C\,t^\alpha\int_t^{\infty}\frac{d\theta}{\theta^{\alpha+1}}\quad, \text{ d'où (27).} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Dans le théorème 19, le fait que A_ω soit une algèbre est obtenu par surcroît, en quelque sorte ; or cette propriété est également une conséquence de la "condition de Beurling" [7] :

(B5) $\quad \frac{1}{\omega} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ <u>et il existe</u> $C > 0$ <u>tel que</u> $\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega} \le \frac{C}{\omega}$.

Il paraît donc opportun de comparer (B4) et (B5) ; pour ce faire, nous donnons une version simplifiée de (B5) pour les poids qui satisfont (B1) :

<u>Proposition 22</u>.- <u>Pour un poids</u> ω <u>qui vérifie</u> (B1) <u>et</u> (B3), (B5) <u>équivaut à</u>

(B6) $\quad \exists\, C > 0 \quad \int_{|y|\ge|x|}\frac{dy}{\omega(y)^2} \le \frac{C}{\omega(x)}$.

Nous prouvons d'abord (B5) $\Longrightarrow$ (B6). On a

$$\int_{|y|\ge|x|}\frac{dy}{\omega(y)^2} = \left(\int_{|y|\ge 2|x|} + \int_{|x|\le|y|\le 2|x|}\right)\frac{dy}{\omega(y)^2}\quad ;$$

dans la deuxième intégrale, on applique (B1) qui donne $\omega(y) \sim \omega(x)$, d'où

$$\int_{|x|\le|y|\le 2|x|}\frac{dy}{\omega(y)^2} \sim \frac{1}{\omega(x)}\int_{|x|\le|y|\le 2|x|}\frac{dy}{\omega(y)} \le \frac{\|\omega^{-1}\|_1}{\omega(x)}\quad ;$$

dans la première intégrale, on a l'inégalité

$$\frac{|y|}{2} \le |x-y| < \frac{3|y|}{2}\quad ;\quad \text{(B1) donne alors}$$

$$\int_{|y|\geq 2|x|} \frac{dy}{\omega(y)^2} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{\omega(x-y)\omega(y)} \quad ;$$

on achève à l'aide de (B5).

Supposons maintenant que ω vérifie (B6). On écrit $(\frac{1}{\omega} * \frac{1}{\omega})(x) = \sum_{j=1}^{3} I_j(x)$; dans I_1, I_2, I_3, l'intégration s'effectue, respectivement, sur $|x-y| \geq 2|y|$, $|x-y| \leq \frac{|y|}{2}$, $\frac{|y|}{2} \leq |x-y| \leq 2|y|$.

Dans $I_1(x)$, on a $\frac{|x-y|}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}|x-y|$; d'où

$$I_1(x) \leq \frac{C}{\omega(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{\omega(y)} \quad ;$$

dans $I_2(x)$, on a $\frac{|y|}{2} \leq |x| \leq \frac{3}{2}|y|$, d'où

$$I_2(x) \leq \frac{C}{\omega(x)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{dy}{\omega(x-y)} \, .$$

$I_3(x)$ est majorée par

$$C \int_{\frac{|y|}{2} \leq |x-y| \leq 2|y|} \frac{dy}{\omega(y)^2} = I_4(x) \quad ;$$

$I_4(x)$ se découpe, à son tour,en trois : quand $\frac{|x|}{2} \leq |y| \leq 2|x|$, on applique $\omega(x) \sim \omega(y)$; quand $|y| \geq 2|x|$, on majore par

$$C \int_{|y|\geq|x|} \frac{dy}{\omega(y)^2} \quad ,$$

et on applique (B6) ; quand $|y| \leq \frac{|x|}{2}$, on a $|x-y| \geq \frac{|x|}{2}$; on majore par

$$C \int_{|x-y|\geq\frac{|x|}{2}} \frac{dy}{\omega(x-y)^2}$$

et l'on utilise encore une fois (B6).

Dès lors, c'est sans surprise qu'on peut énoncer la

Proposition 23.- Si ω satisfait (B1), (B3) et (B4), il satisfait aussi (B5).

Soit $u : \mathbb{R}^+ \to [1,+\infty[$ la fonction $u(t) = \omega(te_1)$; compte tenu de (B1) la condition (B3) s'écrit

$$\sum_{j\geq 0} 2^{jn}\, u(2^j)^{-1} < +\infty ,$$

ce qui entraîne en particulier l'existence de $C > 0$ tel que $t^n\, u(t)^{-1} \leq C$. Alors, pour $|x| = t$, on a

$$\int_{|y|\geq|x|} \frac{dy}{\omega(y)^2} \leq C \int_t^\infty \frac{s^{n-1}}{u(s)^2}\, ds$$

$$= C \int_t^\infty \frac{s^n}{u(s)}\, \frac{ds}{s\, u(s)}$$

$$\leq C' \int_t^\infty \frac{ds}{s\, u(s)}$$

$$\leq C''\, \omega(x)^{-1} \qquad \text{(grâce à B4) ;}$$

finalement, on a obtenu (B6) qui équivaut à (B5). C.Q.F.D.

Il existe vraisemblablement des poids qui vérifient (B1), (B3) et (B5), mais non (B4) ; toute construction explicite est rendue délicate par la proposition 21. Voici une idée : on pose $u(t) = t^s(1 + \phi(t)\, F(\psi(t)))$, où F est périodique, oscillant entre 0 et 1 et ϕ , ψ croissent vers l'infini avec t ; si ϕ, ψ croissent lentement, il est facile de vérifier (B1), ainsi que (B5) ; par contre, je ne sais pas mettre (B4) en défaut.

5.- UNE ALGEBRE A POIDS EXPONENTIEL.

On se donne $s \in]0,1[$ et l'on considère l'espace A_s des $f \in L^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\|f\|_{A_s}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi)|^2\, e^{|\xi|^s}\, d\xi < \infty .$$

Proposition 24.- A_s est une algèbre de Banach ; il existe des fonctions C^∞ qui n'opèrent pas sur A_s et des fonctions qui opèrent sur A_s sans être analytiques.

Pour que A_s soit une algèbre de Banach, il suffit que le poids

$\omega(\xi) = e^{|\xi|^s}$ vérifie (B5) ; autrement dit qu'

(28) il existe $C > 0$ tel que $I(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|^s - |y|^s - |x-y|^s} dy \leq C.$

Pour montrer (28), on remarque qu'il existe $\delta = \delta(s) \in]0,1]$ tel que

$$1 + t^s - (1+t)^s \geq \delta\, t^s \qquad (t \in [0,1]),$$

ce qui donne encore

(29) $$u^s + v^s - (u+v)^s \geq \delta\, \inf(u,v)^s \qquad (u,v \geq 0)$$

on découpe alors $I(x)$ en deux intégrales, l'une pour $|x-y| \leq |y|$, l'autre pour $|x-y| \geq |y|$; à chacune on applique (29), obtenant ainsi

$$I(x) \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\delta |y|^s) dy. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

La seconde assertion de la proposition 24 est une conséquence du

Lemme 13.- Si une fonction F, définie au voisinage de 0, opère sur A_s, F est C^∞ et il existe $C > 0$ telle que $|F^{(j)}(0)| \leq C\, \Gamma(\frac{2j+1}{s})^{1/2}$ $(j \in \mathbb{N})$.

Le fait que certaines fonctions C^∞ ne satisfassent pas les inégalités du lemme 13 est une conséquence du théorème classique d'A. Borel.

L'idée de la démonstration du lemme 13 est très proche de celle du théorème de Dahlberg ; elle consiste à tester F sur une fonction u qui coïncide avec l'identité au voisinage de 0 ; cependant, le poids n'étant plus polynômial, l'existence d'une telle fonction n'est pas une trivialité.

On sait que la classe de Gevrey $G_{1/\sigma}$ $(s < \sigma < 1)$ n'est pas quasi-analytique ; cela se traduit par l'existence d'une fonction C^∞ positive ϕ, portée par $[1,2]$ telle que, pour un certain $R > 0$, on ait

(30) $$\|\phi^{(j)}\|_2 \leq R^j (j!)^{\frac{1}{\sigma}}$$

(pour une démonstration, voir par exemple [34]).

On définit ψ comme la fonction paire telle que

$$\psi(x) = \frac{1}{\|\phi\|_1} \int_x^{+\infty} \phi(t)\, dt \qquad (x \geq 0) \ ;$$

la fonction cherchée est $u(x) = x\psi(x)$; elle est C^∞, portée par $[-2,+2]$, égale à x sur $[-1,1]$. $\hat{u}(\xi)$ s'écrit $2i \|\phi\|_1^{-1} (a_1(\xi) - a_2(\xi))$, où

$$a_1(\xi) = \int_1^2 \phi(t) t \frac{\cos \xi t}{\xi}\, dt$$

$$a_2(\xi) = \int_1^2 \phi(t) \frac{\sin \xi t}{\xi^2}\, dt.$$

Pour montrer que l'intégrale $\int |\hat{u}(\xi)|^2 \exp|\xi|^s d\xi$ est finie, on s'intéresse uniquement aux $|\xi| \geq 1$, $\hat{u}$ est en effet une fonction analytique. En fait, on va voir que

$$(31) \qquad \exists\, K > 0 : \sup_{|\xi| \geq 1} (\exp K|\xi|^\sigma)\, |a_j(\xi)| < +\infty \ .$$

Voici la démonstration de (31) pour j = 2 (le cas j = 1 est parfaitement analogue).

Appelons m_k l'unique entier tel que $m_k - 1 < \sigma k \leq m_k$; pour un certain k_o, on a $m_k \geq 2$ dès que $k \geq k_o$; (31) sera une conséquence de

$$(32) \qquad \sum_{k \geq k_o} \frac{K^k}{k!} |\xi|^{\sigma k} \left| \int_1^2 \phi(t) \frac{\sin \xi t}{\xi^2}\, dt \right| \leq C.$$

Après intégration par parties, le premier membre de (32) s'écrit

$$(33) \qquad \sum_{k \geq k_o} \frac{K^k}{k!} |\xi|^{\sigma k - m_k} \left| \int_1^2 \phi^{(m_k - 2)}(t)\, f_k(\xi t) dt \right| ,$$

où f_k désigne $\pm \sin$ ou $\pm \cos$; on observe que $\int_1^2 |f_k(\xi t)|^2 dt \leq 1$; alors Cauchy-Schwarz et (30) permettent de majorer (33) par

$$\sum_{k \geq k_o} \frac{1}{k!}\, K^k\, R^{m_k - 2}\, ((m_k - 2)!)^{\frac{1}{\sigma}} \ .$$

Pour $R \leq 1$, on <u>choisit</u> $K < 1$; pour $R > 1$, on a $R^{m_k} \leq R^{\sigma k}$ et l'on choisit $K < R^{-\sigma}$.

Il reste à s'assurer que la suite $(k!)^{-1}\ ((m_k-2)!)^{\frac{1}{\sigma}}$ ne croisse pas trop vite ; on vérifie en fait l'inégalité

$$(34) \qquad (k!)^{-1}((m_k-2)!)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C(\sigma)\sigma^k \quad ;$$

quand on s'occupe de a_1, c'est la suite $(k!)^{-1}((m_k-1)!)^{\frac{1}{\sigma}}$ qui apparaît : elle est majorée par $C'(\sigma)\sigma^k k^\sigma$. Ainsi s'achève la démonstration de (31).

Maintenant on peut appliquer l'hypothèse, qui dit que $F \circ u \in A_s$; dès lors, la conclusion du lemme 13 est une propriété générale de la classe A_s :

<u>Lemme 14</u>.- $A_s \subset C^\infty(\mathbb{R})$ <u>et, pour</u> $f \in A_s$, $\|f^{(j)}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2}{s}\Gamma(\frac{2j+1}{s})}\,\|f\|_{A_s}$.

On écrit $f^{(j)}(x) = (2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix.\xi}(i\xi)^j \exp(-\frac{|\xi|^s}{2})\, g(\xi)\, d\xi$, où $\|g\|_2 = \|f\|_{A_s}$; on applique alors Cauchy-Schwarz :

$$\|f^{(j)}\|_\infty \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^{2j} \exp(-|\xi|^s) d\xi\right)^{1/2} \|g\|_2 \quad ;$$

l'intégrale entre parenthèses se calcule : elle vaut précisément $\frac{2}{s}\Gamma(\frac{2j+1}{s})$. C.Q.F.D.

Le théorème de non-analyticité peut se préciser comme suit :

<u>Lemme 15</u>.- <u>Soit</u> $s < \sigma < 1$; <u>toute fonction</u> $F \in C^\infty(\mathbb{T})$ <u>telle que</u> $|\hat{F}(k)| \leq C \exp(-|k|^\sigma)$ <u>et</u> $F(0) = 0$ <u>opère sur</u> A_s.

Nous suivrons de très près la démonstration d'un résultat analogue par N. Leblanc [32].

On écrit $F(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k\, e^{ikt}$, ce qui donne encore

$$F \circ f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k (e^{ikf} - 1) \quad ;$$

pour que $F \circ f \in A_s$, il suffit donc d'avoir

$$(35) \qquad \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k| \; \|e^{ikf} - 1\| < +\infty$$

(nous désignons par $\|\ \|$ la norme dans A_s). Pour estimer $\|e^{if} - 1\|$, on distingue plusieurs cas :

1°.- $\hat{f}$ est portée par $[R,+\infty[$.

L'ensemble $A_s(R)$ des fonctions à spectre dans $[R,+\infty[$ est une sous-algèbre de A_s ; de plus

$$(36) \qquad \|f\,g\| \leq \beta(R)\,\|f\| \;\; \|g\| \qquad (f,g \in A_s(R)),$$

où $\beta(R) = \sqrt{2\int_R^\infty e^{-\delta t^2}\,dt}$ - la démonstration de (36) est analogue à celle de (28) ; on en tire aussitôt, pour $f \in A_s(R)$, $\|f^k\| \leq \beta(R)^{k-1}\,\|f\|^k$ et

$$(37) \qquad \|e^{if} - 1\| \leq \beta(R)^{-1}(e^{\beta(R)\,\|f\|} - 1).$$

2°.- $\hat{f}$ est portée par $[-R,+R]$.

On écrit alors $e^{if} - 1 = \sum_{k=1}^{m} \frac{(if)^k}{k!} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(if)^k}{k!}$, où l'entier m sera précisé plus tard. Désignons par g la transformée de Fourier de $e^{if} - 1$. $\sum_{k=1}^{m} \frac{(if)^k}{k!}$ a son spectre dans $[-Rm,+Rm]$; on a donc

$$\Big(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(if)^k}{k!}\Big)\hat{}\,(\xi) = g(\xi) \qquad \text{pour } |\xi| \geq Rm ,$$

et

$$\|e^{if} - 1\|^2 = \Big(\int_{|\xi| \leq Rm} + \int_{|\xi| \geq Rm}\Big)\,|g(\xi)|^2\, e^{|\xi|^s}\,d\xi$$

$$\leq e^{R^s m^s}\,\|g\|_2^2 + \Big\|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{(if)^k}{k!}\Big\|^2$$

Le premier terme est majoré par $2\pi e^{R^s m^s} \|e^{if} - 1\|_2 \leq 2\pi e^{R^s m^s} \|f\|_2^2$

$\leq e^{R^s m^s} \|f\|^2$.

Le second terme se majore brutalement par $\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\|f\|^k}{k!}\right)^2$; des considérations élémentaires sur la série exponentielle (Taylor et Stirling) montrent que pour m assez grand et supérieur à 3x, on a

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq 1.$$

Ici, on choisit l'entier m tel que $3\|f\| \leq m < 3\|f\| + 1$, ce qui donne finalement

$$\|e^{if} - 1\| \leq (1 + C\, e^{(3R\|f\|)^s} \|f\|^2)^{1/2} \tag{38}$$

(C ne dépend que de s).

3.- f quelconque.

On écrit $f = \sum_{j=1}^{3} f_j$, où $\hat{f}_1$ est portée par $[-R,R]$, $\hat{f}_2$ par $[R,+\infty[$, $\hat{f}_3$ par $]-\infty,-R]$ et $\|f_j\| \leq \|f\|$.

$e^{if} - 1$ se calcule à l'aide de l'identité

$$(u_1+1)(u_2+1)(u_3+1) - 1 = u_1u_2u_3 + u_1u_2 + u_2u_3 + u_3u_1 + u_1 + u_2 + u_3 \ ,$$

où $u_j = e^{if_j} - 1$. Les inégalités (37) et (38) conduisent à majorer $\|e^{if} - 1\|$ par

$$C\left[\frac{1}{\beta(R)}\left(e^{\beta(R)\|f\|} - 1\right) + 1\right]^2 \left[C'\|f\| \exp \tfrac{1}{2}(3R\|f\|)^s + 2\right]$$

(C, C' ne dépendent que de s) ; en remplaçant f par kf ($k \in \mathbb{Z}$), on obtient

$$\|e^{ikf} - 1\| \leq C\left[\frac{1}{\beta(R)}\left(e^{|k|\beta(R)\|f\|} - 1\right) + 1\right]^2 \left[C'|k|\,\|f\| \exp \frac{|k|^s}{2}(3R\|f\|)^s + 2\right] . \tag{39}$$

Le moment est venu de choisir R en fonction de k de façon qu'on ait (35) quand $c_k = e^{-|k|^\sigma}$. La fonction β est une bijection décroissante de $[0,+\infty[$ sur $]0,\beta(0)]$; pour k assez grand, il existe donc $R_k \geq 0$ tel que $\beta(R_k) = |k|^{s-1}$; dans (39), on peut alors négliger les constantes additives et écrire

$$\|e^{ikf} - 1\| \leq C|k|^{3-2s} \exp|k|^s(2\|f\| + \frac{3^s R_k^s \|f\|^s}{2}) ,$$

où C dépend de s et de f.

Pour terminer la preuve de (35), il reste à préciser le comportement de R_k quand $|k| \to \infty$. De la relation

$$\sqrt{2\int_{R_k}^{+\infty} e^{-\delta t^s} dt} = |k|^{s-1} ,$$

on tire sans difficulté $R_k \leq (a \operatorname{Log} k + b)^{\frac{1}{s}}$, où $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ ne dépendent que de s. C.Q.F.D.

ANNEXE I

LA STRUCTURE FAIBLE DES ESPACES DE BESOV

La structure faible de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ est une quasi-topologie, c'est-à-dire la donnée, en chaque $f \in B^s_{p,q}$, d'une famille de filtres convergeant vers f.

On dit que le filtre F converge faiblement vers f si

(1) F contient une partie bornée de $B^s_{p,q}$,

(2) Il existe $t < s$ et $q_1 \in [1,+\infty]$ tel que F converge vers f dans B^t_{p,q_1}.

On a vu (proposition 4) qu'alors f appartient à $B^s_{p,q}$ et que, quels que soient $t < s$ et $q_1 \in [1,+\infty]$, F converge vers f dans B^t_{p,q_1}.

Je dis que la quasi-topologie ainsi définie n'est pas une topologie ; autrement dit, il n'existe pas de topologie sur $B^s_{p,q}$ pour laquelle l'ensemble des filtres convergeant vers f soit exactement l'ensemble des filtres convergeant faiblement vers f.

Supposons en effet qu'il existe une telle topologie. Alors l'intersection de tous les filtres convergeant faiblement vers 0 serait encore un filtre convergeant faiblement vers 0 ; en particulier, il existerait une partie bornée B de $B^s_{p,q}$ telle que $B \in F$, quel que soit $F \to 0$ faiblement.

Nous allons voir au contraire que, pour toute partie bornée B de $B^s_{p,q}$, il existe $F \to 0$ faiblement tel que $B \notin F$.

Une partie bornée de $B^s_{p,q}$ est nécessairement contenue dans une boule $\|f\|_{B^s_{p,q}} < r$ $(r > 0)$; il nous suffira donc de construire une suite f_k convergeant faiblement vers 0, telle que $\|f_k\|_{B^s_{p,q}} \geq r$. Nous nous limitons ici à la dimension $n = 1$.

Soit $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ telle que $\|\psi\|_p = 1$ et $\hat{\psi}$ soit portée par $[0,\frac{1}{6}]$; puis $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, égale à 1 sur $[1,\frac{3}{2}]$ et à 0 en dehors de $[\frac{2}{3},2]$; par la proposition 2, il existe $C_0 > 0$ tel que

(3) $$\| (2^{sj} \| \phi(2^{-j}D)f \|_p)_{j\geq o} \|_{\ell^q} \leq C_o \| f \|_{B^s_{p,q}} .$$

On pose alors $f_k(x) = r\, C_o \sum_{j\geq o} 2^{-sj} \omega_{j,k} \exp(i 2^j x)\, \psi(x)$, où $(\sum_{j\geq o} \omega^q_{j,k})^{\frac{1}{q}} = 1$; on a alors

$$(\phi(2^{-j}D) f_k)(x) = r C_o 2^{-sj} \omega_{j,k} \exp(i 2^j x)\, \psi(x)$$

et l'inégalité (3) entraîne $\| f_k \| \geq r$.

Il reste à choisir $\omega_{j,k}$ de sorte que $f_k \to 0$ faiblement dans $B^s_{p,q}$.

Quand $q = +\infty$, c'est très simple : on fait $\omega_{j,k} = 1$ pour $j \geq k$ et $\omega_{j,k} = 0$ pour $j < k$. Alors, pour $t < s$,

$$\| f_k \|_{B^t_{p,\infty}} \leq C \sup_{j\geq k} 2^{(t-s)j} = C\, 2^{(t-s)k} ,$$

qui tend vers 0 quand $k \to \infty$.

Pour $q < \infty$, il existe certainement une suite positive $\omega_{j,k}$ telle que $\sum_{j\geq o} \omega^q_{j,k} = 1$ et $\sup_j \omega_{j,k}$ tend vers 0 quand $k \to \infty$ (sinon l'espace c_o coïnciderait avec ℓ^q !) ; alors

$$\| f_k \|_{B^s_{p,\infty}} \leq C \sup_{j\geq o} \omega_{j,k} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0,$$

et, à plus forte raison, $f_k \to 0$ dans B^t_{p,q_1} quels que soient $t < s$ et $q_1 \in [1, +\infty]$.

C.Q.F.D.

ANNEXE II

L^p-ESTIMATES FOR CERTAIN NON-REGULAR PSEUDO-DIFFERENTIAL OPERATORS.

Gérard BOURDAUD

(Publié aux Communications in Partial Differential Equations, volume 7, n°9, 1982, pp. 1023-1033).

1. INTRODUCTION.

Let $\sigma(x,\xi)$ be a sufficiently regular function defined on $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. The pseudo-differential operator (ψ. D. O.) with symbol σ is defined on the Schwartz class by the formula :

$$Op(\sigma)(f)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix.\xi}\, \sigma(x,\xi)\, \hat{f}(\xi)\, d\xi$$

(where $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix.\xi}\, f(x)\, dx$ is the Fourier transform of f).

In order to prove that $Op(\sigma)$ is bounded on L^p, for $p \in]1,+\infty[$, one usually shows that :

1. $Op(\sigma)$ is bounded on L^2, by almost orthogonality arguments ;

2. $Op(\sigma)$ takes L^1 into L^1-weak, using the Calderón-Zygmund decomposition [48].

Coifman and Meyer proved that L^p-continuity can be obtained more directly as a consequence of the multiplier theorem of Marcinkiewicz ; the method is essentially the following :

1. they characterize L^p-functions by their Littlewood-Paley series [38] .

2. they reduce the problem to "elementary symbols" of the following type :

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} M_j(2^{j\delta} x)\, \psi(2^{-j}\xi)\,, \tag{1}$$

where ψ is a C^∞ function whose compact support does not contain 0 and (M_j) is a bounded sequence in an appropriate Fréchet space.

We shall illustrate this method by two theorems. The first one deals with symbols $\sigma(x,\xi)$ which are x-Hölderian and satisfy, with respect to ξ, the $S^0_{1,\delta}$-estimations of Hörmander ; then we generalize results of Kumano-go, Nagase [31] and Meyer [38]. In the second theorem, the symbols will possess the following properties :

$$(2) \qquad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha (1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

$$(3) \qquad |\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha\, \omega(|h|)\, \Omega(|\xi|)(1+|\xi|)^{-|\alpha|}$$

(α belonging to $\mathbb{N}^n$), where ω and Ω are suitable positive functions ; symbols of this type were studied by Nagase [42] .

Commutators of ψ.D. O.'s can be estimated by the same method, as we shall see in a future publication.

We use Sobolev spaces H^s_p and Besov spaces B^s_{pq} on $\mathbb{R}^n$ (see chap. 6 of [6]) for $m \in \mathbb{N}$, L^∞_m denotes the space of functions on $\mathbb{R}^n$ whose distribution-derivatives, up to and including order m, belong to L^∞. The classical Hölder space $B^s_{\infty\infty}$ is simply noted Λ_s.

2. LITTLEWOOD-PALEY SERIES OF A TEMPERED DISTRIBUTION.

Let $a > 1$ and φ a positive C^∞ function on $\mathbb{R}^n$, supported on the annulus $\frac{1}{a} \leq |\xi| \leq a$, such that $\sum_{j\in\mathbb{Z}} \varphi(a^{-j}\xi) = 1$ for $\xi \neq 0$; denote by φ_0 the function $\xi \longrightarrow \sum_{j\leq 0} \varphi(a^{-j}\xi)$: thus φ_0 is C^∞ and supported on the ball $|\xi| \leq a$. For each $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ we have :

$$(4) \qquad f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f ,$$

where the functions $\Delta_j f$ are defined by their Fourier transforms : $(\Delta_j f)\hat{}\,(\xi) = \varphi(a^{-j}\xi)\,\hat{f}(\xi)$ for $j \geq 1$, $(\Delta_0 f)\hat{}\,(\xi) = \varphi_0(\xi)\,\hat{f}(\xi)$.

In a given problem, a and φ are fixed once and for all and the series (4) is called "the" Littlewood-Paley series of f.

Sobolev and Besov spaces are characterized by properties of the series (4) :

1. for $p \in]1,+\infty[$, f belongs to H^s_p if and only if $(\sum_{j\geq 0} a^{2sj} |\Delta_j f|^2)^{1/2} \in L^p$;

2. for $p,q \in [1,+\infty]$, f belongs to B^s_{pq} if and only if $\sum_{j\geq 0} a^{sqj} \|\Delta_j f\|_p^q < \infty$.

Let us now give the key-result for estimations of ψ.D. O.'s (the reader will formulate it in the Besov case).

LEMMA 1. Let $p \in]1,+\infty[$, $s \in \mathbf{R}$, $\gamma > 1$, m an integer greater than $\frac{n}{2}$; there exists a positive constant C, depending on a, n, p, s, γ, such that

(I) for every C^∞ function ψ supported on the annulus $\frac{1}{\gamma} \leq |\xi| \leq \gamma$, the distributions $f_j = \psi(a^{-j}D) f$ satisfy the inequality

$$\|(\sum_{j=0}^{\infty} a^{2sj} |f_j|^2)^{1/2}\|_p \leq C \|\psi\|_{L^\infty_m} \|f\|_{H^s_p} \quad ; \tag{5}$$

(II) for every sequence $(f_j)_{j\geq 0}$ of functions whose respective spectra are included in the annulus $\gamma^{-1} a^j \leq |\xi| \leq \gamma a^j$, one has

$$\|\sum_{j=0}^{\infty} f_j\|_{H^s_p} \leq C \|(\sum_{j=0}^{\infty} a^{2sj} |f_j|^2)^{1/2}\|_p \quad ; \tag{6}$$

(III) for $s > 0$, it is possible to replace, in (II), the annulus $\gamma^{-1} a^j \leq |\xi| \leq \gamma a^j$ by the balls $|\xi| \leq \gamma a^j$.

The proofs of (I) and (II) are substantially contained in theorem 6.4.3 of [6] as for (III), it is exactly the lemma 5 of [38] .

3. NON-REGULAR SYMBOLS AND DECOMPOSITION IN ELEMENTARY SYMBOLS.

Let $\delta \in [0,1]$, $N \in \mathbf{N}$, r a non-integer positive number ; we shall say that a symbol $\sigma(x,\xi)$ belongs to $S^0_{1,\delta}(N,r)$ if there exists a positive constant C such

that, for each $|\alpha| \leq N$

$$(7) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{-|\alpha|+\delta|\beta|} \quad \text{for} \quad |\beta| < r,$$

$$(8) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) - \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C|h|^{r-[r]}(1+|\xi|)^{-|\alpha|+r\delta}$$

for $|\beta| = [r]$.

If r is a positive integer, (8) is replaced by a Zygmund condition

$$(9) \qquad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x+h,\xi) + \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x-h,\xi) - 2\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)|$$

$$\leq C|h|(1+|\xi|)^{-|\alpha|+r\delta} \quad \text{for} \quad |\beta| = r-1.$$

$S^0_{1,\delta}(N,r)$ is a Banach space for an obvious norm. Symbols of type (1), where (M_j) is a bounded sequence in Λ_r, generate - in a precise sense - the class $S^0_{1,\delta}(N,r)$:

LEMMA 2. Let N be an even integer greater than n. There exists a positive constant C, depending on n and N, and a positive convergent series $\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k$ such that, for every $r > 0$ and $\sigma \in S^0_{1,\delta}(N,r)$, one has $\sigma = \tilde{\sigma} + \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k \sigma_k$, with

(i) $\tilde{\sigma}(x,\xi) = 0$ for $|\xi| \geq 2$ and

$$(10) \qquad \|\partial_\xi^\alpha \sigma(.,\xi)\|_{\Lambda_r} \leq C\|\sigma\| \quad \text{for} \quad |\alpha| \leq N,$$

(ii) $\sigma_k(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} M_{k,j}(2^{j\delta}x)\,\psi_k(2^{-j}\xi)$, where ψ_k is a C^∞ function supported on the annulus $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$ and

$$(11) \qquad \|M_{k,j}\|_{\Lambda_r} \leq C\|\sigma\|, \quad \|\psi_k\|_{L^\infty_{N-n-1}} \leq C.$$

The following proof is adapted from proposition 5, in chapter II of [15] .

Multiplying $\sigma(x,\xi)$ by a suitable C^∞ function of ξ, we obtain $\sigma(x,\xi) = \tilde{\sigma}(x,\xi) + \tau(x,\xi)$, where

- $\tilde{\sigma}(x,\xi) = 0$ for $|\xi| \geq 2$ and satisfies the inequalities (10),
- $\tau(x,\xi) = 0$ for $|\xi| \leq 1$ and

(12) $$\|\tau\|_{S^0_{1,\delta}(N,r)} \leq C\|\sigma\|_{S^0_{1,\delta}(N,r)}.$$

Let λ be a C^∞ function, supported on the annulus $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$, such that $\sum_{j\geq 0} \lambda(2^{-j}\xi) = 1$ for $|\xi| \geq 1$, and $\tau_j(x,\xi) = \lambda(\xi)\,\tau(2^{-j\delta}x\,,\,2^j\xi)$; then

(13) $$\|\partial_\xi^\alpha \tau_j(.,\xi)\|_{\Lambda_r} \leq C\|\sigma\| \quad \text{for} \quad |\alpha| \leq N.$$

Denote by θ a C^∞ function supported on the annulus $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$, equal to 1 on $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$; a Fourier expansion gives $\tau_j(x,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} c_{k,j}(x)\, e^{ik.\xi}\, \theta(\xi)$ for $\xi \in \mathbb{R}^n$, with $c_{k,j}(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \tau_j(x,\xi)\, e^{-ik.\xi}\, d\xi$.

Let us take $u_k = (1+|k|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$, $M_{k,j} = (1+|k|^2)^{\frac{N}{2}} c_{k,j}$ and $\psi_k(\xi) = (1+|k|^2)^{\frac{n+1-N}{2}} e^{ik.\xi}\, \theta(\xi)$; then we have

$$\begin{aligned}\tau(x,\xi) &= \sum_{j\geq 0} \lambda(2^{-j}\xi)\,\tau(x,\xi)\\ &= \sum_{j\geq 0} \tau_j(2^{j\delta}x\,,\,2^{-j}\xi)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} u_k\, \sigma_k(x,\xi).\end{aligned}$$

We now verify (11) : for $|\alpha| \leq N-n-1$, we have $|\psi_k^{(\alpha)}(\xi)| \leq C\|\theta\|_{L^\infty_{N-n-1}}$, but θ is a fixed function, from which follows the estimation of $\|\psi_k\|_{L^\infty_{N-n-1}}$; integration by parts gives

$$\|M_{k,j}\|_{\Lambda_r} = \|(2\pi)^{-n} \int_{|\xi|\leq 2} (I-\Delta_\xi)^{\frac{N}{2}}\, \tau_j(.,\xi)\, e^{-ik.\xi}\, d\xi\|_{\Lambda_r}$$

$$\leq C \sup_{|\alpha|\leq N,\, \xi\in\mathbb{R}^n} \|\partial_\xi^\alpha \tau_j(.,\xi)\|_{\Lambda_r};$$

thus (11) follows from (13).

4. CONTINUITY THEOREM.

THEOREM 1. Let $\delta \in [0,1]$, $r > 0$, N an even integer greater than $\frac{3n}{2} + 1$, $s \in](\delta-1)r, r[$. Every pseudo-differential operator whose symbol belongs to $S^0_{1,\delta}(N,r)$ is bounded on H^s_p $(1 < p < +\infty)$ and B^s_{pq} $(p,q \in [1,+\infty])$.

Let $m = N-n-1$: the hypothesis on N implies $m > \frac{n}{2}$; by lemma 2, the proof of theorem 1 is reduced to the following result :

PROPOSITION. Let $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} M_j(2^{j\delta}x)\,\psi(2^{-j}\xi)$ be an elementary symbol, where ψ is a C^∞ function supported on the annulus $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$ and (M_j) a bounded sequence in Λ_r. For every $s \in](\delta-1)r, r[$, the operator $Op(\sigma)$ is bounded on H^s_p and B^s_{pq} and its operator norms are majorized by $C(\sup_{j\geq 0} \|M_j\|_{\Lambda_r})\|\psi\|_{L^\infty_m}$ (the constant C depends on n, p, q, r, s, δ).

Let $f_j = \psi(2^{-j}D)f$, $A = \sup_{j\geq 0} \|M_j\|_{\Lambda_r}$; constants $C, C', \ldots$ which will appear in the various inequalities depend on n, p, q, r, s, δ ; we let the reader transpose the proof to the Besov case.

a) Proof in the case $\delta = 1$.

Let $M_j = \sum_{k\geq 0} M_{j,k}$ be the Littlewood-Paley series of M_j, for $a = 2$. $\hat{M}_{j,k}$ is supported on the annulus $2^{k-1} \leq |\xi| \leq 2^{k+1}$ for $k \geq 1$ and on the ball $|\xi| \leq 2$ for $k = 0$; moreover we have $\|M_{j,k}\|_\infty \leq C\,A\,2^{-kr}$. Take $N_{j,h}(x) = M_{j,h-j}(2^j x)$: thus $\hat{N}_{j,h}$ is supported on the annulus $2^{h-1} \leq |\xi| \leq 2^{h+1}$ and

$$\|N_{j,h}\|_\infty \leq C\,A\,2^{(j-h)r} \quad ; \tag{14}$$

with this notation $Op(\sigma)(f)$ equals $\sum_{j\geq 0}\sum_{h\geq j} N_{j,h} f_j$. Now we observe that $\widehat{(N_{j,h} f_j)}$ is supported on :

- the annulus $\frac{2^h}{3} \leq |\xi| \leq 3.2^h$ for $h \geq j+5$;
- the ball $|\xi| \leq 35.2^j$ for $h \leq j+4$.

Hence we write $Op(\sigma)(f)$ as the sum of two terms :

$$g_1 = \sum_{\nu=0}^{4} \Big\{ \sum_{j\geq 0} N_{j,j+\nu} f_j \Big\}$$

$$g_2 = \sum_{h\geq 5} \Big\{ \sum_{j=0}^{h-5} N_{j,h} f_j \Big\}.$$

The hypothesis $s > 0$, lemma 1 and inequality (14) imply

$$\begin{aligned} \|g_1\|_{H_p^s} &\leq C \sum_{\nu=0}^{4} \Big\| \Big(\sum_{j\geq 0} 4^{sj} |N_{j,j+\nu} f_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \\ &\leq C'A \Big\| \Big(\sum_{j\geq 0} 4^{sj} |f_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \\ &\leq C''A \|\psi\|_{L_m^\infty} \|f\|_{H_p^s} . \end{aligned}$$

Similarly

$$\begin{aligned} \|g_2\|_{H_p^s} &\leq C \Big\| \Big\{ \sum_{h\geq 5} 4^{hs} \Big| \sum_{j=0}^{h-5} N_{j,h} f_j \Big|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\|_p \\ &\leq C'A \Big\| \Big\{ \sum_{h\geq 5} 4^{h(s-r)} \Big| \sum_{j=0}^{h-5} 2^{j(r-s)} (2^{sj} f_j) \Big|^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\|_p . \end{aligned}$$

We obtain the estimation of g_2 with the aid of the following elementary result :

LEMMA 3. For $b > 1$ there exists a positive constant C, depending on b, such that the ℓ^2-norm of the sequence $\eta_h = b^{-h} \sum_{j=0}^{h} b^j \xi_j$ $(h \geq 0)$ is majorized by $C \big(\sum_{j\geq 0} |\xi_j|^2 \big)^{\frac{1}{2}}$.

As $s < r$ we can apply lemma 3 to $b = 2^{r-s}$; then

$$\|g_2\|_{H_p^s} \leq C''A \Big\| \Big(\sum_{j\geq 0} 4^{sj} |f_j|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_p$$

$$\leq C'''A \|\psi\|_{L_m^\infty} \|f\|_{H_p^s} .$$

b) Proof in the case $0 \leq \delta < 1$.

The classes $S^0_{1,\delta}$ increase with δ : we can restrict ourselves to $s < (\delta-1)n/2$.

Let $M_j = \sum_{k\geq 0} M_{j,k}$ be the Littlewood-Paley series of M_j, relative to $a = 2^{1-\delta}$:

then $\hat{M}_{j,k}$ is supported on the annulus $2^{(1-\delta)(k-1)} \leq |\xi| \leq 2^{(1-\delta)(k+1)}$ for $k \geq 1$ and on the ball $|\xi| \leq 2^{1-\delta}$ for $k = 0$; moreover

$$\|M_{j,k}\|_\infty \leq C\, A\, 2^{(\delta-1)\, rk}. \tag{15}$$

Choose $\nu = \nu(\delta)$ so that $2^{(1-\nu)(1-\delta)} \leq \frac{1}{12}$; then the function $M_{j,k}(2^{j\delta}x)\, f_j(x)$ has its spectrum included

- in the annulus $\frac{2^j}{4} \leq |\xi| \leq 4.2^j$ when $j \geq k + \nu$,
- in the ball $|\xi| \leq \gamma.2^k$ (with $\gamma = 2^{(\nu-2)\,\delta+1} + 3.2^{\nu-1}$) if $j < k + \nu$. Let us write $Op(\sigma)(f)$ as the sum of two terms :

$$g_1(x) = \sum_{j>\nu} \Big\{ \sum_{k=0}^{j-\nu} M_{j,k}(2^{j\delta}x) \Big\}\, f_j(x)$$

$$g_2(x) = \sum_{k\geq 0} \Big\{ \sum_{j=0}^{k+\nu-1} M_{j,k}(2^{j\delta}x)\, f_j(x) \Big\}.$$

We have $\Big| \sum_{k=0}^{j-\nu} M_{j,k}(2^{j\delta}x) \Big| \leq CA \sum_{k=0}^{j-\nu} 2^{(\delta-1)\, rk} \leq C'A$, so that

$$\|g_1\|_{H_p^s} \leq C''A \Big\| \Big(\sum_{j\geq\nu} 4^{sj} |f_j|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_p$$

$$\leq C'''A \|\psi\|_{L^\infty_m} \|f\|_{H_p^s}.$$

The hypothesis $s < 0$, lemma 3 and (15) imply that, for every x,

$$\sum_{k\geq 0} 4^{(s+(1-\delta)r)k} \Big| \sum_{j=0}^{k+\nu-1} M_{j,k}(2^{j\delta}x)\, f_j(x) \Big|^2$$

$$\leq C\, A^2 \sum_{k\geq 0} 4^{sk} \Big(\sum_{j=0}^{k+\nu-1} 2^{-sj} \big| 2^{sj} f_j(x) \big| \Big)^2$$

$$\leq C'A^2 \sum_{j\geq 0} 4^{sj} |f_j(x)|^2 \ ;$$

Let us raise this to the power $\frac{p}{2}$ and then integrate : the hypothesis $s + (1-\delta)\, r > 0$ implies

$$\|g_2\|_{H_p^{s+(1-\delta)\, r}} \leq C'''A \|\psi\|_{L^\infty_m} \|f\|_{H_p^s} \ ;$$

we conclude with the inclusion $H_p^{s+(1-\delta)r} \subset H_p^s$. (QED)

It is interesting to observe that the interval $](\delta-1)r, r[$ of theorem 1 is maximal.

$Op(\sigma)$ is not necessarily bounded on H^r, even if σ depends only on x.

Let $\sigma(x) = \sum_{j\geq 0} 2^{-jr} \exp(i2^j x)$ and f a function in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ whose spectrum is $[0,1]$; then $\sigma \in \Lambda_r$ and

$$\|\sigma f\|^2_{H^r} = \sum_{j\geq 0} 4^{-rj} \int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|^2)^r \, |\hat{f}(\xi - 2^j)|^2 \, d\xi$$

$$\geq \sum_{j\geq 0} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(\xi - 2^j)|^2 \, d\xi = +\infty.$$

Consider now the symbol

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} 2^{(\delta-1)rj} \exp(-i2^j x) \, \psi(2^{-j}\xi) , \tag{16}$$

where ψ is a C^∞ function supported on $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}]$, equal to 1 on $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$: if we take $M_j(x) = 2^{(\delta-1)rj} \exp(-i2^{j(1-\delta)}x)$, we see that σ is an elementary symbol in the class $S^0_{1,\delta}(\infty, r)$. We are going to prove that there is no bounded linear operator from $H^{(\delta-1)r}$ into $\mathcal{D}'$ which extends $Op(\sigma)$.

Let $f_\nu(x) = \sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{j} 2^{j(1-\delta)r} \exp(i2^j x) \, g(x)$, where g is a function in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ whose spectrum lies in $[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}]$; then $(f_\nu)_{\nu\geq 2}$ is a bounded sequence in $H^{(\delta-1)r}$, but $Op(\sigma)(f_\nu) = (\sum_{j=2}^{\nu} \frac{1}{j}) \, g$.

5. COMBINED EFFECTS OF x-REGULARITY AND ξ-DECREASE.

It is known that the sequence of estimations (2) is not sufficient for $Op(\sigma)$ to be bounded on L^p $(1 < p < +\infty)$. In order to obtain the last property, one of the following means is available :

1) Specify the modulus of continuity with respect to x :

$$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x+h, \xi) - \partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C_\alpha \, \omega(|h|)(1+|\xi|)^{-|\alpha|} , \tag{17}$$

where $\omega(t)$ is a function which tends to 0 sufficiently fast with t - it is the idea of Coifman and Meyer (theorem 9 of [15]) ;

2) improve the decrease when $|\xi| \longrightarrow +\infty$:

(18) $$|\partial_\xi^\alpha \sigma(x,\xi)| \leq C\ (1+|\xi|)^{-|\alpha|-\varepsilon} \qquad (\varepsilon > 0)\ ;$$

$Op(\sigma)$ is then a ψ.D.O. with negative order, necessarily bounded on L^p.

Between (17) and (18) there are a lot of possible estimations, precisely described by (3), where

- ω is a positive, non-decreasing, concave function on $\mathbb{R}^+$ (we do not impose $\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0$)

- Ω is a positive function on $\mathbb{R}^+$ satisfying the following property : for every $c > 1$, there exists $A(c) > 0$ such that $\frac{t}{c} \leq s \leq ct$ implies $\Omega(s) \leq A(c)\,\Omega(t)$.

THEOREM 2. There is an equivalence between the following assertions :

(i) $$\sum_{j\geq 0} \omega^2(2^{-j})\,\Omega^2(2^j) < +\infty\ ;$$

(ii) every ψ.D.O. whose symbol satisfies inequalities (2) and (3) is bounded on L^p $(1 < p < +\infty)$.

Paraphrasing lemma 2, we observe that symbols satisfying (2) and (3) have an "elementary model" of the following type :

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} M_j(x)\,\psi(2^{-j}\xi)\ ,$$

where ψ is a C^∞ function supported on the annulus $\frac{1}{3} \leq |\xi| \leq 3$, $\|M_j\|_\infty \leq C$ and $|M_j(x+h) - M_j(x)| \leq C\,\omega(|h|)\,\Omega(2^j)$.

According to a classical lemma ([15], page 43) M_j can be written $P_j + Q_j$, where $\|P_j\|_\infty \leq C$, $\hat{P}_j$ is supported by $|\xi| \leq \frac{2^j}{6}$ and $\|Q_j\|_\infty \leq C\,\omega(2^{-j})\,\Omega(2^j)$.

The proof is then a simple transcription of pages 43, 44, 45 in [15].

Let us suppose now that $u_j = \omega(2^{-j})\,\Omega(2^j)$ does not belong to ℓ^2 and note $v_j = \inf(u_j, 1)$; then we have $\sum_{j\geq 0} v_j^2 = +\infty$ and the symbol $\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} v_j \exp(-i2^j x)\,\psi(2^{-j}\xi)$ satisfies (2) and (3).

σ can be treated exactly as (16) : for a suitable choice of ψ, $Op(\sigma)$ is not a

bounded operator on L^2.

REMARKS. 1. For $\Omega = 1$, we recover the ψ.D.O.'s studied by Coifman and Meyer.

2. The case $\omega = 1$ generalizes that of ψ.D.O.'s with negative order.

3. When $\omega(t) = t^{\alpha}$ and $\Omega(t) = t^{\beta}$, with $0 \leq \beta < \alpha \leq 1$, we find again a theorem of Nagase [42].

[12] CALDERÓN, A.P. : Algebras of singular integral operators. Proc. Symp. in Pure Math. 10 (1966), pp. 18-55.

[13] CALDERÓN, A.P. and VAILLANCOURT, R. : On the boundedness of pseudo-differential operators. J. Math. Soc. Japan, 23, n°2 (1971), pp. 374-378.

[14] CALDERÓN, A.P. and ZYGMUND, A. : On the existence of certain singular integrals, Acta Math.88 (1952), pp. 85-139.

[15] COIFMAN, R.R. et MEYER, Y. : Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels, Astérisque 57 (S.M.F. 1978).

[16] COIFMAN, R.R. et MEYER, Y. : Commutateurs d'intégrales singulières et opérateurs multilinéaires. Ann. Inst. Fourier Grenoble 28, n°3 (1978), pp. 177-202.

[17] COIFMAN, R.R., Mc. INTOSH, A. et MEYER, Y. : L'intégrale de Cauchy définit un opérateur borné sur L^2 pour les courbes lipschitziennes. Ann. of Math. 116 (1982), pp. 361-387.

[18] DAHLBERG, B.E.J. : Regularity properties of Riesz potentials. Indiana Univ. Math. J. 28, n°2 (1979), pp. 257-268.

[19] DAHLBERG, B.E.J. : A note on Sobolev spaces, Proc. Symp. in Pure Math. 35, part. 1, pp. 183-185.

[20] FABES, E.B., JODEIT, M. and RIVIERE, N.M. : Potential techniques for boundary value problems... Acta Math. 141 (1978), pp.165-186.

[21] FABES, E.B., JERISON, D.S. and KENIG, C.E. : Necessary and sufficient conditions for the absolute continuity of "elliptic-harmonic" measure. (à paraître aux Ann. of Math).

[22] FEFFERMAN, C. : The multiplier problem for the ball. Ann. Math. 94 (1971), pp. 330-336.

[23] FEFFERMAN, C. and STEIN, E.M. : Some maximal inequalities. Amer. J. Math. 93 (1971), pp. 105-115.

[24] FRÖLICHER, A. and BUCHER, W. : Calculus in vector spaces without norm. Lecture Notes in Math. 30 (Springer 1966).

[25] GAGLIARDO, E. : Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili. Richerche di Mat. 7 (1958), pp. 102-137.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ADAMS, D.R. : On the existence of capacitary strong type estimates in $\mathbb{R}^n$. Arkiv för Mat. 14, n°1 (1976), pp. 125-140.

[2] ALVAREZ-ALONSO, J.D. and CALDERÓN, A.P. : Functional calculi for pseudo-differential operators I. Fourier Analysis, Proc. of the Sem. held at El Escorial, june 1979, Ed. M. de Guzmàn and I. Peral, pp. 2-61.

[3] BASTIANI, A. : Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie, J. Analyse Math. Jerusalem 13 (1964), pp. 1-114.

[4] BEALS, M. and REED, M. : Propagation of singularities for hyperbolic pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math. 35 (1982), pp. 169-184.

[5] BEALS, R. : Characterization of pseudodifferential operators and applications. Duke Math. J. 44, n°1 (1977), pp. 45-57.

[6] BERGH, J. and LÖFSTRÖM, J. : Interpolation spaces, Springer-Verlag (1976)

[7] BEURLING, A. Construction and analysis of some convolution algebras. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14 (1964), pp. 1-32.

[8] BONY, J.M. : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les E.D.P. non linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 14 (1981), pp. 209-246.

[9] BOURDAUD, G. et MEYER, Y. : Estimations L^2 précisées pour la classe $S^0_{0,0}$. Sém. Analyse Harmonique, Orsay (1982-83).

[10] BRENNER, P., THOMEE, V. and WAHLBIN, L. : Besov spaces and applications to difference methods... Lecture Notes in Math. 434 (Springer 1975).

[11] CALDERÓN, A.P. : Commutators of singular integral operators. Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 53 (1965), pp. 1092-1099.

[39] MEYER, Y. : Régularité des solutions des E.D.P. non linéaires. Séminaire Bourbaki, n° 560 (Juin 1980).

[40] MEYER, Y. : Exposé au Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, Ecole Polytechnique (14 décembre 1982).

[41] MOSER, J. : On Harnack's theorem for elliptic differential equations Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961), pp. 577-591.

[42] NAGASE, M. : The L^p-boundedness of pseudo-differential operators with non-regular symbols, Comm. Partial Diff. Eq. 2, n°10 (1977), pp. 1045-1061.

[43] PEETRE, J. : On spaces of Triebel-Lizorkin type. Ark. för Mat. 13 (1975), pp. 123-130.

[44] PEETRE, J. : Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) 12 (35), n° 2 (1970), pp. 325-334.

[45] REED, M. and SIMON, B. : Methods of modern mathematical physics II, Academic Press (1975).

[46] STAMPACCHIA, G. : Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Univ. Montréal Press. Québec (1966).

[47] STEGENGA, D.A. : Multipliers of the Dirichlet space. Illinois J. Math. 24, n°1 (1980), pp. 113-139.

[48] STEIN, E.M. : Singular integrals and differentiability properties of functions. Princeton U.P. (1970).

[49] STEIN, E.M. : The development of square functions in the work of A. Zygmund. Bull. Amer. Math. Soc. 7, n°2 (1982), pp.359-376.

[50] STRICHARTZ, R.S. : Multipliers on fractional Sobolev spaces. J. Math. Mech. 16, n°9 (1967), pp. 1031-1060.

[51] TAYLOR, M.E. : Pseudo-differential operators. Princeton U.P. (1981).

[52] TRIEBEL, H. : General function spaces I (Decomposition methods). Math. Nachr. 79 (1977), pp. 167-179.

[53] TRIEBEL, H. : Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type. Teubner-Texte zur Math.,Leipzig (1978).

[54] VALLEE-POUSSIN (de la), C.J. : Sur l'intégrale de Lebesgue. Trans. Amer. Math. Soc. 16 (1915), pp. 435-561.

[26] HÖRMANDER, L. : The boundary problem of physical geodesy. Arch. Rat. Mech. Anal. 62 (1976), pp. 1-52.

[27] IGARI, S. : Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\hat{A}^2$. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 15, n°2 (1965), pp. 525-536.

[28] KATO, T. : Scattering theory. Studies in appl. Math., vol. 7, A.H. Taub ed., Math. Assoc. of Amer., pp. 90-115.

[29] KATZNELSON, Y. : An introduction to Harmonic Analysis (Dover Publ., New-York 1976).

[30] KROL, I. : The existence of smooth truncation operators bounded on $W_{m,p}(\mathbb{R}^n)$. Preliminary report, Notices Amer. Math. Soc. 24 n°4 (1977), A 384.

[31] KUMANO-GO, H. and NAGASE, M. : Pseudodifferential operators with non regular symbols and applications. Funkcialaj Ekvacioj 21 (1978), pp. 151-192.

[32] LEBLANC, N. : Les algèbres à poids. Sém. Analyse Harmonique, Orsay, (1967-68), exp. n°7.

[33] LITTLEWOOD, J. and PALEY, R. : Theorems on Fourier series and power series (II).Proc. London Math. Soc. 42 (1937), pp. 52-89.

[34] MANDELBROJT, S. : Séries adhérentes, régularisation... Gauthier-Villars (1952).

[35] MARCUS, M. and MIZEL, V.J. : Complete characterization of functions which act , via superposition... Trans. Amer. Math. Soc. 251 (1979), pp. 187-218.

[36] MAZJA, V.G. and SAPOSNIKOVA, T.O. : On multipliers in Sobolev spaces. Vestnik Leningrad Univ. Math. 12 (1980), pp. 125-134.

[37] MAZJA, V.G and SAPOSNIKOVA, T.O. : On multipliers in function spaces with fractional derivatives. Soviet Math. Dokl. 20, n°1 (1979), pp. 160-165.

[38] MEYER, Y. : Remarques sur un théorème de J.M. Bony. Suppl. Rendiconti Circ. Mat. Palermo, serie II, n°1 (1981), pp. 1-20.

RÉSUMÉ

Cette thèse présente d'abord les principales propriétés (continuité, développements limités du composé et de l'adjoint) du calcul pseudo-différentiel pour les symboles $\sigma(x,\xi)$ classiques en ξ, de classe de Hölder en x.

On généralise un théorème de Calderón en montrant que le commutateur entre un O.P.D de la classe $Op^{1}_{1,0}$ et une fonction dont le gradient est un multiplicateur de H^s est un opérateur borné sur H^s.

On détermine ensuite la plus grande sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2,L^2)$ contenue dans $Op^{o}_{1,1}$.

Un dernier chapitre est consacré aux fonctions qui opèrent - par composition à gauche - sur les espaces de Sobolev et apparentés.

MOTS CLEFS :

Pseudo-différentiel (opérateur)
Commutateur
Sobolev (espace).